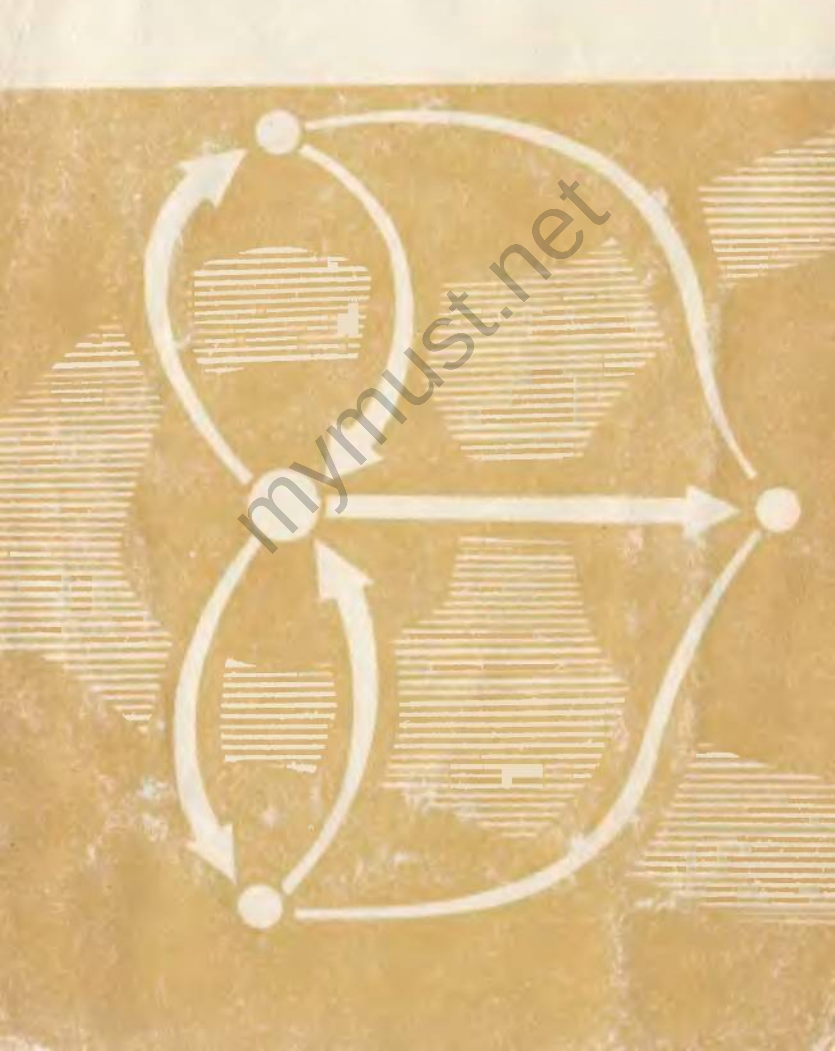
О. ОРЕ

ГРАФ БА ТҮҮНИЙГ ХЭРЭГЛЭХ



О. ОРЕ

ГРАФ БА ТҮҮНИЙГ ХЭРЭГЛЭХ

БНМАУ
АРДЫН БОЛОВСРОЛЫН ЯАМНЫ ХЭВЛЭЛ
УЛААНБААТАР 1979 ОН

„Современная математика"

Популярная серия

ГРАФЫ И ИХ ПРИМЕНЕНИЕ

перевод с английского

Л. И. Головиной под редакцией И. М. Яглома

Өгөгдсөн цэгүүдийг холбосон шугамуудын тор-графыг математикийн төрөл бүрийн салбар, хэрэглээнд өргөн ашигладаг.

Энэ номын зохиогч нь норвегийн нэрт алгебрч Ойстин Оре юм. Номыг ойлгоход хэрэг дээрээ дунд сургуулийн 7—8-р ангийн математикийн сурахаас хэтрэхгүй тийм бага мэдлэг шаардагдана.

Математикийн аливаа ном судалж, шинэ ухагдхуун эзэмшихэд мэдээжээр уншигчаас зохих хүчин чармайлт, тууштай байдал, тэвчээр шаардана. Гэхдээ энэ бол математик үнэхээр сонирхдог хүнд таалагдахаас өөр талгүй.

ОРШИЛ

Швейцарын нэрт математикч Л. Эйлер 1737 онд графын онолын анхны ажлыг хэвлүүлжээ. Графын онол нь математикийн зугаатай болон ухаан сорих бодлогуудтай холбогдож байсан учраас эхэндээ математикийн нүсэр бищ салбарын нэгэнд тоологдож байв. Гэвч математикийн цаашдын хөгжил ялангуяа түүний хэрэглээ нь графын онолыг хөгжүүлэхэд хүчтэй түлхэц өгчээ. XIX зуун гэхэд графын онолыг цахилгаан хэлхээний ба молекулийн схемийг байгуулахад хэрэглэх боллоо. Одоо үед графын онолыг цэвэр математикийн салбар жишээлбэл ·математикийн харьцааны онолд жирийн аппарат болгон хэрэглэж байгаагаас гадна нөгөө талаас янз бүрийн харгалзаа тогтоох, тээврийн бодлого болон нефть дамжуулах хоолойн сүлжээний урсгалын тухай бодлого ер нь „программчлалын бодлогууд“ гэж нэрлэгдэх практикийн янз бүрийн бодлого бодоход өргөн хэрэглэж байна. Одоо графын онол нь эдийн засаг, сэтгэл судлал ба биологи зэрэг салбарт хэрэглэгдэж байна. Ялангуяа хэрэв математикчдын сонирхлыг одоо хүртэл татсаар байгаа дөрвөн будгийн тухай алдарт бодлогыг математикийн зугаатай болон ухаан сорих бодлогын тоонд оруулбал ӭдгээр нь графын онолын хэсэг болсон хэвээр байна.

Математикт графын онолыг топологийн нэгэн салбар гэж үздэг ба мөн энэ онол нь алгебр ба тооны онолтой шууд холбоотой юм.

Бид энэ номонд графын онолын зарим нэгэн хялбар асуудлаар хязгаарлах хэрэгтэй болно. Бид тэдгээрийг сонгон авахдаа нэг талаас, тийм аргаар бодож болдог зарим нэгэн тодорхой бодлогуудтай танилцуулах,·нөгөө талаас, графын тусламжтайгаар явуулж болох судалгааны талаар ямар нэгэн төсөөлөл олгох зорилго тавилаа. Завшаан болоход математикийн үлэмж даруухан аппаратаар графын тухай сургаалыг эхлэн судлагчдад нэн хялбар ойлгогдохоор бичиж болдог байна.

I БҮЛЭГ

ГРАФ ГЭЖ ЮУ ВЭ?

1 §. Спортын тэмцээн

Танай сургуулийн хөл бөмбөгийн баг тэмцээнд оролцож, өөр сургуулиудын багуудтай тогложээ, гэж бодъё. Нийт 6 баг тоглосон байг. Танай багийг A үсгээр, харин бусад багуудыг B, C, D, E ба F үсгээр тэмдэглэе. Тэмцээн эхлээд хэдэн долоо хоноход зарим багууд харилцан тоглочихсон байв. Жишээлбэл:

A нь C, D, F-тэй
B нь C, E, F-тэй
C нь A, B-тэй
D нь A, E, F-тэй
E нь B, D, F-тэй
F нь A, B, D, E-тэй

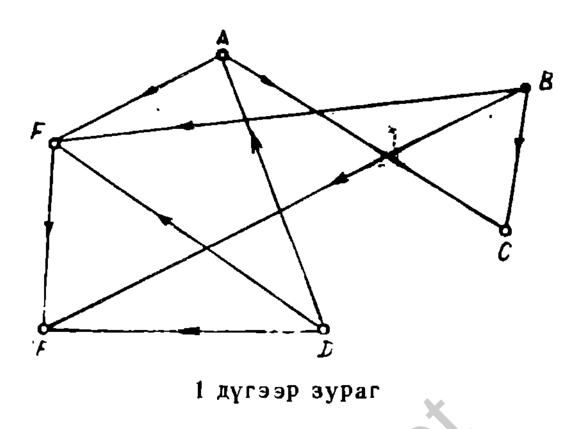
тус тус тоглосон байв.

Энэ байдлыг дараах геометр схемээр дүрсэлж болно. Баг тус бүрийг цэг юмуу бяцхан дугуйгаар дүрсэлж бие биетэйгээ тоглочихсон багуудад харгалзах хос цэгүүдийг (дугуйнуудыг) хэрчмээр холбоё. Тэгвэл өмнө дурдсан тоглолтын жагсаалтын хувьд 1 дүгээр зураг дээр дүрсэлсэн схем гарна.

Ийм маягийн схемийг ***граф*** гэж нэрлэдэг. Тэр нь ***орой*** гэж нэрлэгдэх A, B, C, D, E, F-гэсэн хэд хэдэн цэгүүд, энэ цэгүүдийг холбосон графын ***ирмэг*** гэж нэрлэгдэх, жишээлбэл AC юмуу EB гэх зэрэг хэд хэдэн хэрчмүүдээс тогтоно.

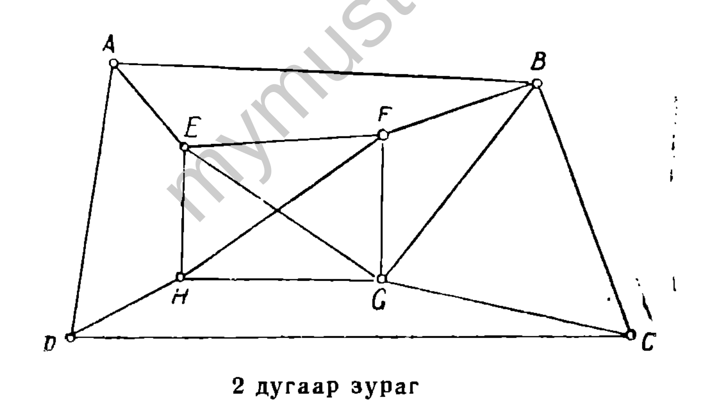
1 дүгээр зургаас харвал графын зарим ирмэгийн огтлолцсон цэг графын орой биш байж болно. Графын зарим

ирмэг огтлолцсон юм шиг харагдаж байгаа нь бид графаа хавтгай дээр дүрсэлснээс болж байгаа хэрэг юм.



1 дүгээр зураг

Огторгуйд бол графын ирмэгүүдийг бие бие дээгүүр зөрж гарсан утаснууд гэж сэтгэх нь нэн тохиромжтой байхсан билээ.



2 дугаар зураг

Аль ч тохиолдолд графыг хавтгай дээр дүрслэхдээ будилахаас болгоомжлон түүний оройнуудыг ил тод (жишээлбэл бяцхан дугуйнуудаар) дүрслэх шаардлагатай юм.

Ямар ч төрлийн тэмцээний тоглолтын олонлог бүрийг харгалзах графаар дүрсэлж болно. Үүний урвууд хэрэв ямар нэг граф буюу, өөрөөр хэлбэл, хэрчмээр

(ирмэгээр) холбогдсон цэгүүдээс (оройнуудаас) тогтсон дүрс өгөгдсөн бол түүнийг ямар нэг тэмцээний схем гэж үзэж болно. Жишээ болгож 2 дугаар зураг дээр дүрсэлсэн графыг авч үзье. Энэ графыг найман багийн тэмцээнд *A* баг *B*, *E*, *D* багуудтай; *B* ба *A*, *F*, *C*, *G*-багуудтай тоглочихсон гэх мэт байдалд харгалзах граф гэж үзэж болно.

Дасгал

1. Тоглолтын улирлын дунд үед танай хөл бөмбөгийн юмуу гар бөмбөгийн багуудтай бусад багуудын тоглосон тоглолтын графыг зур.

2.2 дугаар зураг дээрх графууд харгалзсан тоглолтуудын бүрэн жагсаалтыг гарга.

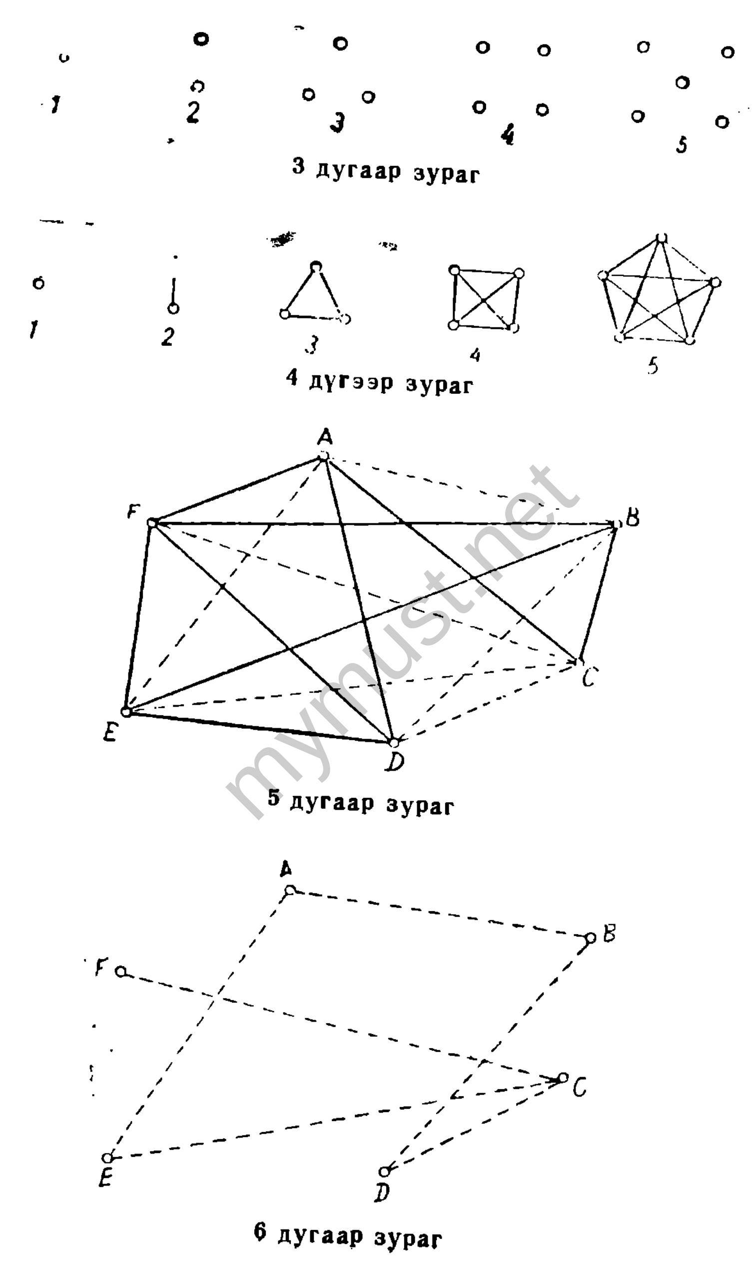
3. 1 ба 2 дугаар зураг дээрх графууд хичнээн ирмэг, хичнээн оройтой вэ?

2§. ТЭГ ГРАФ БА БҮРЭН ГРАФ

Графын онолыг хэрэглээнд олонтой тохиолддог зарим нэг тусгай граф байдаг. Бид одоохондоо графыг биеийн тамирын тэмцээний явцыг илээр дүрслэн харуулсан схем гэж авч үзье. Тоглолтын улирал эхлэхээс өмнө ямарч тоглолт явагдаагүй учир графид ямар ч ирмэг байхгүй байна. Тийм граф нь саланги оройнууд буюу өөрөөр хэлбэл ганц ч ирмэгээр холбогдоогүй оройнуудаас тогтоно. Ийм маягийн графыг бид ***тэг граф*** гэж нэрлэж байя. Багууд буюу оройнуудын тоо нь 1, 2, 3, 4 ба 5-тай тэнцүү үеийн тийм графуудыг 3 дугаар зураг дээр дүрсэлжээ. Энэ тэг графуудыг O_1, O_2, O_3 гэх мэтчлэн, ер нь n-оройтой тэг графыг O_n гэсэн тэмдгүүдээр тэмдэглэдэг заншилтай.

Одоо бас нэг онцгой тохиолдлыг авч үзье. Тэмцээний улирал дуусахад баг *бүр* бусад бүх багуудтай нэг нэг удаа тоглосон байж гэж бодъё. Тэгвэл харгалзах графид хос орой бүр ирмэгээр холбогдсон байна. Тийм графыг ***бүрэн граф*** гэж нэрлэдэг. 4 дүгээр зураг дээр оройн тоо $n = 1, 2, 3, 4, 5$ байх үеийн бүрэн графуудыг дүрсэлжээ.

Бид энэ бүрэн графуудыг харгалзан U_1, U_2, U_3, U_4, U_5 гэж ер нь n-оройтой бөгөөд бүх бололцоот оройнууд нь ирмэгээр холбогдсон графыг U_n гэж тус тус


1
2
3
4
5
3 дугаар зураг
1
2
3
4
5
4 дүгээр зураг
A
B
C
D
E
F
5 дугаар зураг
A
B
C
D
E
F
6 дугаар зураг

тэмдэглэж байя. Энэ графыг бүх диагоналуудыг нь татсан n-өнцөгт гэж сэтгэж болно.

Ямар нэг граф, жишээлбэл 1 дүгээр зурагт дүрслэгдсэн G граф, байхад түүний дутагдаж байгаа (өөрөөр хэлэхэд тухайн үед явагдаагүй боловч эцэстээ явагдах тоглолтуудад харгалзах) ирмэгүүдийг нэмж мөн тэр оройнуудтай бүрэн граф болгон хувиргаж болно. 1 дүгээр зураг дээрх графыг ингэж хувиргасныг 5 дугаар зураг дээр (одоо хэрдээ явагдаагүй тоглолтуудад харгалзах ирмэгүүдийг тасархай шугамуудаар дүрслэв) дүрслэв. Одоохондоо явагдаагүй боловч эцэстээ явагдах тоглолтуудад харгалзах графыг мөн тусад нь зурж болно.

G-графын хувьд энэ граф нь 6 дугаар зураг дээр дүрслэгдсэн граф гарна.

Энэ шинэ графыг G ***графын гүйцээлт*** гэж нэрлэдэг ба түүнийг $\bar{G}$ гэж тэмдэглэж заншжээ. $\bar{G}$ графын гүйцээлтийг авбал (зурвал) G граф гарна. G ба $\bar{G}$ графуудын бүх ирмэгүүд нийлээд мөн тэр оройнуудтай бүрэн графыг бүрэлдүүлнэ.

Дасгал

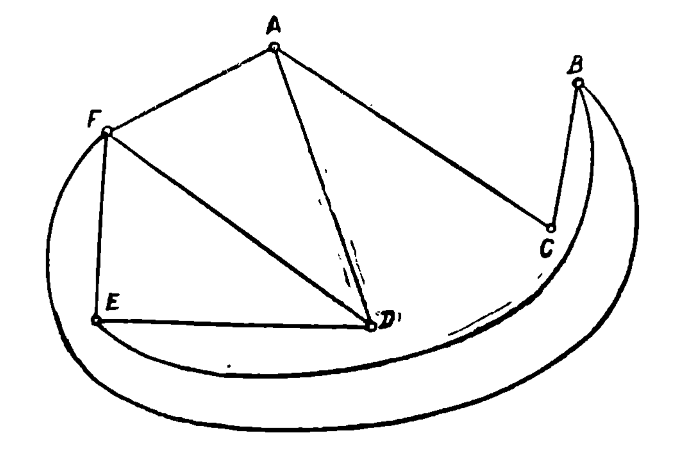
1. 2 дугаар зураг дээрх графын гүйцээлтийг зур.
2. Бүрэн граф U_n -ийн ирмэгийн тоо хэд вэ?

3§. Изоморф графууд

G-графыг (1 дүгээр зураг) янз бүрээр дүрсэлж болохыг тэмдэглэе.

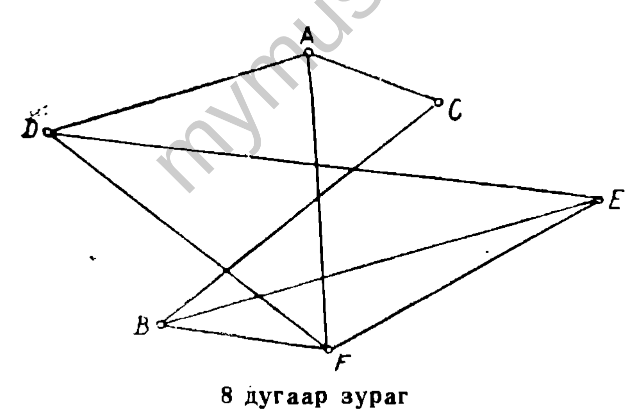
Нэгдүгээрт, түүний ирмэгүүдийг заавал шулуун шугамуудаар дүрслэх нь алба биш. Өмнө авч үзсэн мөнхүү оройнуудыг бид дурын шугамуудаар холбож болно. Жишээлбэл G-графыг 7 дугаар зураг дээрх шигээр дүрсэлж болно.

Хоёрдугаарт, графын оройнуудыг хавтгай дээр бид дураар байрлуулж болно. Жишээлбэл G графын оройнуудыг 8 дугаар зураг дээрх шигээр байрлуулж болно. Хэрэв 1,7 ба 8 дугаар зургууд дээрх гурван графыг спортын тэмцээний явцыг дүрсэлж байгаа графууд гэж үзвэл эдгээр нь чухам ямар ямар багууд хоорондоо тоглосон тухай яг ижил мэдээг агуулна. Иймд энэ графууд нь ямар нэг утгаараа ***нэгэн ижил графууд*** юм.



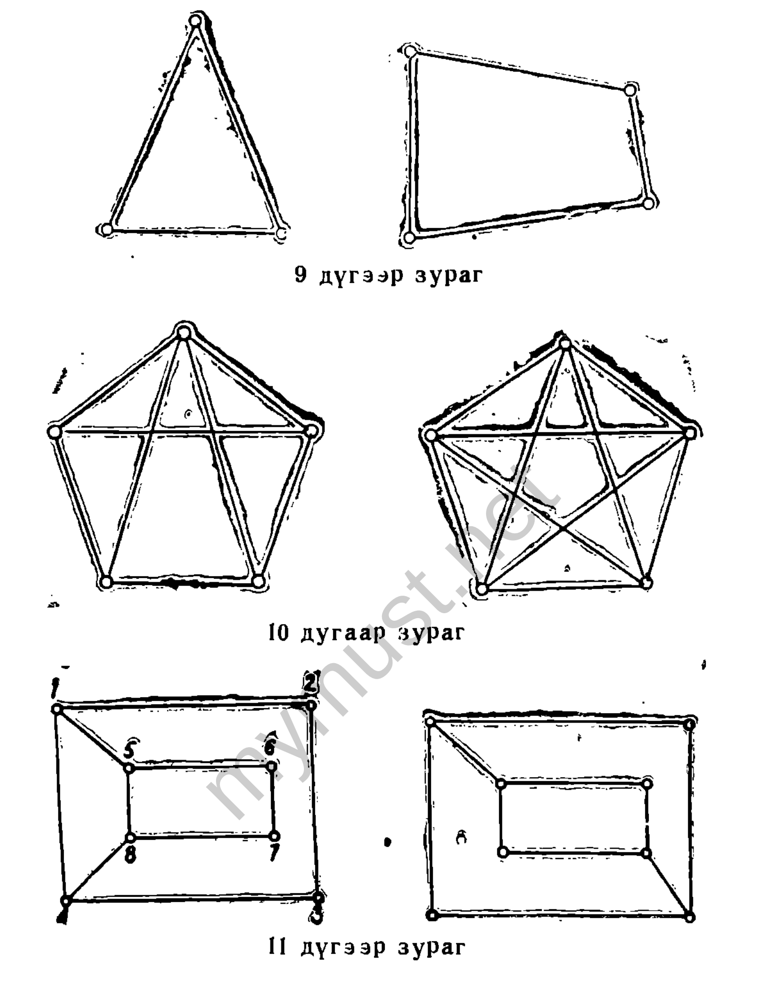
7 дугаар зураг

Хэрэв G_1 ба G_2 гэсэн хоёр граф нь явагдсан тоглолтуудын нэг ижил жагсаалтад харгалзаж байвал тэдгээрийг бид *изоморф* графууд гэж нэрлэж байя.



8 дугаар зураг

Өөр үгээр хэлбэл хэрэв G_1 ба G_2 графууд изоморф бол тэдгээр нь нэг ижил тооны оройтой ба G_1 графын дурын хоёр, жишээлэхэд B_1 ба C_1 оройнууд ирмэгээр холбогдсон байвал G_2 графын тэдэнд харгалзах B_2 ба C_2 оройнууд бас ирмэгээр холбогдсон байх ба урвуу нь ч мөн биелнэ.



9 дүгээр зураг

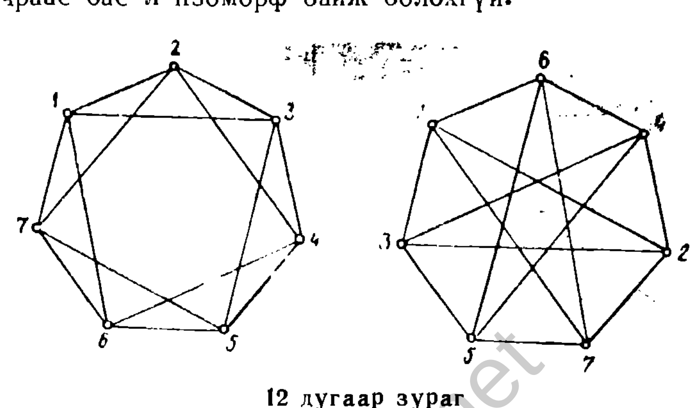
10 дугаар зураг

11 дүгээр зураг

1,7 ба 8 дугаар зураг дээрх графууд харахад хэдийгээр ялгаатай мэт боловч энэ тодорхойлолт ёсоор изоморф (өөрөөр хэлбэл нэг ижил зохион байгуулалттай) графууд юм. Математикт олонтой хэрэглэгддэг „изоморф“ гэдэг нэр томьёо нь грекийн“ (изо-тэнцүү (адилхан) ба морф хэлбэр (дүрс) гэсэн хоёр үгээс бүтжээ.

Өгөгдсөн хоёр граф нь изоморф уу, үгүй юу гэсэн асуудлыг шийдэх явдал цөөнгүй тохиолдоно. Заримдаа

граф изоморф биш байгааг шууд хариулж болно. Жишээлбэл 9 дүгээр зураг дээрх графууд нь тэнцүү биш тооны оройтой учир изоморф байж болохгүй. 10 дугаар зураг дээрх графууд нь ижил биш тооны ирмэгүүдтэй учраас бас л изоморф байж болохгүй.



12 дугаар зураг

Харин 11 дүгээр зураг дээрх графууд изоморф биш гэдгийг харуулахад арай нарийн сэтгэлгээ шаардагдана. Жишээлбэл нэгдүгээр графид эхний оройдоо буцаж ирсэн

(1,2), (2,3), (3,4), (4,8), (8,7), (7,6), (6,5), (5,1)

найман зэрэгцээ (өөрөөр хэлбэл хос хосоороо ерөнхий оройтой) ирмэгүүдийн дараалал байхад харин тийм дараалал хоёрдугаар графад байхгүй байна. Иймд хоёрдугаар графын оройнуудыг яаж ч тэмдэглэсэн нэгдүгээр графын ирмэгээр холбогдсон оройн хос бүрийн хувьд хоёрдахь графын, ирмэгээр холбогдсон харгалзах хосыг бид зааж чадахгүй (Үүнийг батал).

Хэрэв хоёр графыг изоморф биш гэж яаж батлах нь шууд харагдахгүй байвал тэдний изоморф байх тухай асуудал нь нилээд төвөгтэй байдаг. Жишээ болгож 12 дугаар зураг дээрх графуудыг авч үзье. Энэ графууд нь үнэн хэрэг дээрээ изоморф юм.

Дасгал

1.1,2,6 дугаар зургууд дээрх графууд хоорондоо изоморф биш гэдгийг үзүүл.

2.11 дүгээр зураг дээрх хоёр граф хоорондоо изоморф байж болохгүйг харуулах бас нэг шалтгааныг заа.

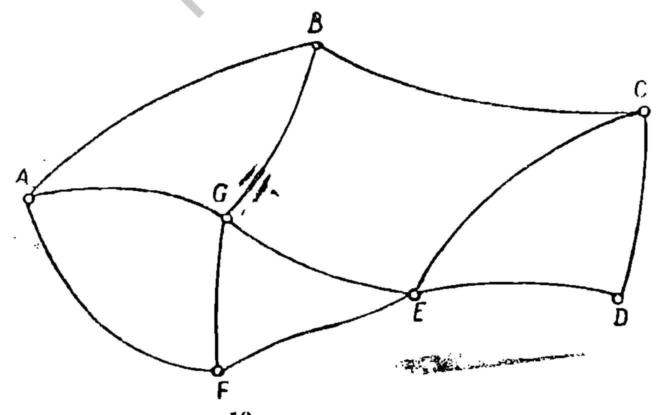
3.12 дугаар зураг дээрх хоёр графын изоморф байгаа нь илт харагдахуйцаар энэ хоёр графын оройнуудыг тэмдэглэ.

4§. Хавтгай графууд

Олонхи асуудалд графыг яаж дүрслэх нь хамаагүй байна, өөрөөр хэлбэл, ижил мэдээ агуулж байгаа изоморф графуудыг нэг граф гэж авч үзэж болно. Жишээлбэл графыг анх тайлбарласан шигээ тоглосон тоглолтуудын өвөрмөц маягийн жагсаалт гэж сэтгэхэд ч ижил мэдээ бүхий графуудыг изоморф гэж үзэж болох юм. Гэвч зарим тохиолдлуудад графыг тусгай маягаар зурж болох эсэх тухай асуудал гол ач холбогдолтой байдаг юм. 1 ба 7 дугаар зураг дээр дүрслэгдсэн хоёр изоморф графуудыг жишиж үзье. Нэгдүгээр дээр ирмэгүүд нь графын орой болдоггүй таван цэг дээр огтлолцсон байхад хоёрдугаар дээр графын ирмэгүүдийн огтлолцлолын бүх цэгүүд нь түүний оройнууд болж байна.

Ирмэгүүд нь зөвхөн оройнууд дээрээ огтлолцсон байхаар зурж болдог графыг ***хавтгай граф*** гэж нэрлэдэг. Жишээлбэл 1 дүгээр зураг дээр дүрслэгдсэн G графын хувьд түүнтэй изоморф бөгөөд бүх ирмэгүүд нь зөвхөн оройнууд дээрээ огтлолцсон граф (7 дугаар зураг) оршин байгаа учраас энэ граф нь хавтгай граф юм.

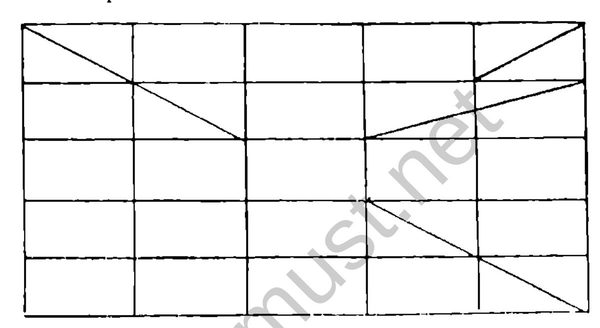
Хавтгай графыг хот суурингууд юмуу станцуудыг холбосон замуудыг дүрсэлсэн газрын зураг гэж үзэж болно. Жишээлбэл 13 дугаар зураг дээр дүрслэгдсэн газрын зураг дээр A, B, ... , G-гэсэн 7 станц тэм-



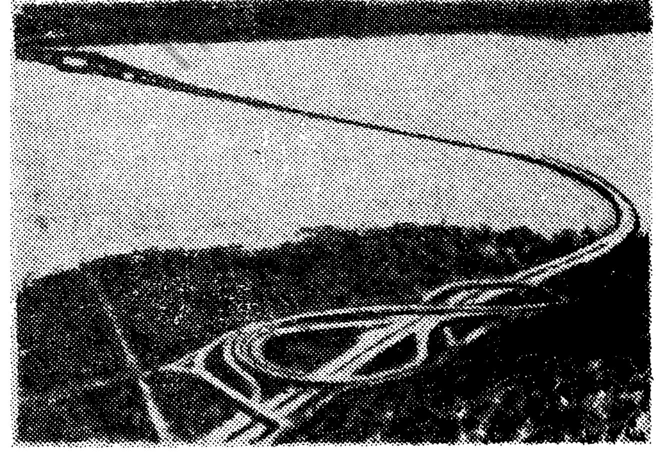
13 дугаар зураг

дэглэгдсэн ба тэгэхдээ тэдний зарнмууд нь бие биетэйгээ AG, BC, FE гэх мэтчилэн замуудаар холбогдсон байна. Мөн үүний урвуугаар замууд дүрсэлсэн газрын зураг бүхнийг хавтгай граф гэж үзэж болно. Ямар ч хотын дэвсгэр зургийг (жишээлбэл 14 дүгээр зургийг хар), мөн хавтгай граф гэж болох бөгөөд тэгэхэд гудамж нь ирмэг, гудамжны уулзвар болон талбай нь орой болно.

Гэхдээ орчин үеийн техник бидний олон төсөөллийг өөрчилсөн учир одоо үед замуудыг дүрсэлсэн газрын зураг бүхэн нь тэр болгон хавтгай графаар дүрслэгдэхгүй гэдгийг бид (орчин үеийн хөгжлийн дагуу) хүлээн зөвшөөрөх ёстой.



14 дүгээр зураг



15 дугаар зураг

Хоёр замын огтлолцол дээрээс зорчигчид нэг шугамаас нөгөө шугамд шилжиж үл чадах тийм ялгаатай түвшингүүдээр явсан шугамуудыг одоо үед замын сүлжээнд нэмэн хэрэглэх болжээ (15 дугаар зураг). Өөрөөр хэлбэл тийм янзын зургийг дүрслэх графын ирмэгүүд нь орой болохгүй цэгүүд дээр огтлолцоно

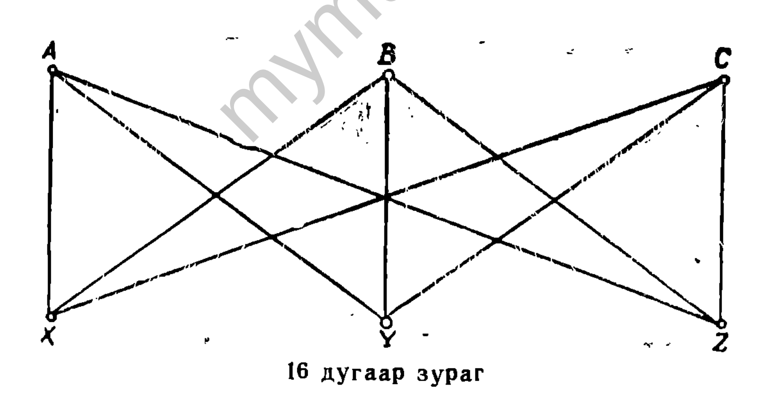
Дасгал

1. Өөрийнхөө оршин суудаг орон нутгийн орчны замын сүлжээнд харгалзах хавтгай графыг зур.

2. Өөрийнхөө оршин суудаг хот юмуу зэргэлдээх хотын дэвсгэр зурагт харгалзах хавтгай графыг зур.

5§. Хавтгай графуудын тухай нэгэн бодлого

Одоо бодлого бодоход графыг хэрэглэх талаар хоёр жишээ авч үзье. Эдгээр бодлогуудын аль аль нь ирмэгүүд нь оройнуудаас өөр цэгүүд дээр огтлолцоогүй байхаар зарим нэг графыг хавтгай дээр зурж болох эсэхийг тодруулах асуудалд шилжих юм. Эртний нэг ухаан сорих бодлогын („Гурван байшин ба гурван худгийн тухай бодлого") эхний жишээ болгож үзье.



16 дугаар зураг

Нэг газар гурван байшин, тэнд оршин суугчдад зориулсан гурван худаг байв. Энэ орон нутгийн цаг агаараас болж худагнууд нь үе үе ширгэдэг учраас байшин бүрээс худаг тус бүрд хүрч очих боломжтой байх нь чухал байв. Ямар нэг хугацаа өнгөрсний дараа A, B

ба C-байшингийн харшууд хоорондоо понтой муудалцсанаас болж очих ба буцах замдаа бие биетэйгээ дайралдахгүй байхаар x, y, z-гурван худагт хүрэх замууд засацгаахаар шийдвэрлэжээ.

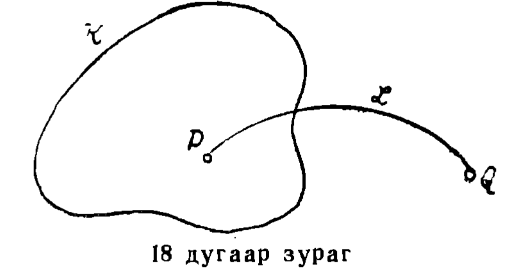
Бүх замууд нь шулуун байх ердийн оЙрлалд харгалзсан графыг 16 дугаар зураг дээр дүрсэлжээ. Энэ зам буюу графын ирмэг нь A, B, C байшин ба x, y, z-худгуудын байрласан цэгүүдээс ялгаатай олон цэгүүд дээр огтлолцсон байна. 17 дугаар зураг дээрх шигээр замуудыг байгуулбал илүү огтлолцлын цэгүүдийг 1 хүртэл багасгаж болно.

17 дугаар зураг

Бидний сонирхож буй асуудал: Харгалзсан граф нь хавтгай граф байхаар өөрөөр хэлбэл графын ирмэгүүд оройн A, B, C, X, Y, Z цэгүүдээс өөр хаана ч огтлолцоогүй байхаар замуудыг байгуулж болох уу гэсэн асуудал болно. Хичнээн оролдсон ч та нар хэрэгтэй шийдийг олж чадахгүй. Гэхдээ дахин дахин туршин үзэж оролдоод бодлогыг бид бодож чадахгүй байгаа явдал бодлого уулаасаа бодогдохгүйн математикийн баталгаа хараахан биш юм. Нарийн баталгаа нь дараахь теоремээр үндэслэгдэнэ.

Муруйнуудын тухай Жорданы теорем. *K-нь хавтгай дээр байгаа тасралтгүй битүү шугам болог.* (Энэ нь олон өнцөгт, тойрог, эллипс юмуу бүр ч илүү төвөгтэй хэлбэр бүхий ямар нэг шугам байж болно) *K-шугам нь хавтгайг дотоод ба гадаад муж болгон хуваана.*

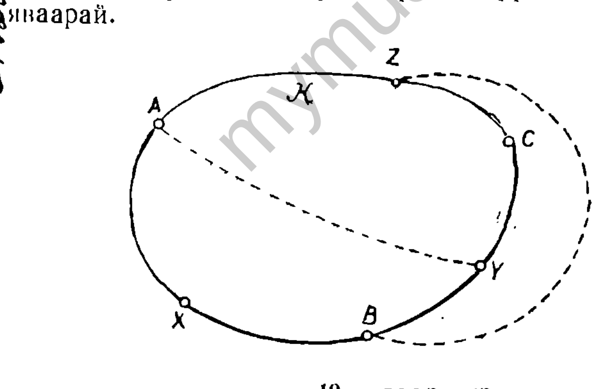
Дотоод мужийн дурын P цэгийг гадаад мужийн ямар ч Q цэгтэй холбосон дурын тасралт-



18 дугаар зураг

гүй муруй Z-бүхэн нь K-г огтолно (18 дугаар зургийг хар).

Жорданы теоремийн нотолж буй зүйл яриагүй үнэн гэдэг нь та бүхэнд магад мэдэгдэж байгаа байх. Геометр төсөөллийн зөн билэг бидэнд теорем үнэн зөв гэдгийн итгэлийг төрүүлж байна. Энэ теоремыг баталъя гэвэл тийм ч хялбаргүй. Гол хүндрэл нь „шугам“ гэдэг ухагдхууны нарийн тодорхойлолтонд л оршиж байгаа юм. Бид энд энэ тодорхойлолт ба Жорданы теоремийн баталгааг авч үзэхгүй орхиё. Та бүхэн цаашдаа энэ теоремийг илэрхий үнэн өгүүлбэр гэж тооцож яваарай.



19 дүгээр зураг

Битүү *K*-шугамын дурын хоёр, жишээлэхэд *A* ба *Y*-цэгийг *K*-шугамтай *A*, *Y*-ээс өөр ерөнхий цэггүй *AY* муруйгаар холбоход төгсгөлийн цэгүүдийг оруулахгүй бол энэ муруй нь нэг бол *K*-дотор, нэг бол *K*-шугамын гадна оршино гэсэн зөн билгийн илэрхий дүгнэлт

Жорданы теоремээс мөрдөн гарна (19 дүгээр зургийг хар)

Битүү шугам K дээр A, B, Y, Z эрэмбээр байрласан дөрвөн цэг байг. Хоорондоо огтлолцохгүй AY ба BZ шугам татъя. Тэгвэл тэдний нэг нь жишээлэхэд AY нь K дотор нөгөө BZ нь K шугамын гадаа хэвтэнэ. Үүнийг бид Жорданы теоремийг ашиглан баталж болох боловч (Жорданы теоремийг баталгаагүй авсан шигээ[1]) баталгаагүй авъя. Эцэст нь K шугаман дээр A, X, B, Y, C, Z эрэмбээр байрласан зургаан цэг (19 дүгээр зураг) байг. Тэднийг холбосон AY, BZ, CX гурван шугам огтлолцохгүй байж болохгүй. Энэ гурван шугам нь K-шугамын хувьд гадаад ба дотоод хоёр мужид байрласан байх ёстойг анхаарвал эдгээрийн ядаж хоёр нь нэг мужид байрлах учраас заавал огтлолцоно.

Дайсагналцсан гурван хөрш ба тэдний гурван худгийн тухай бодлогод энэ сэтгэлгээг шууд хэрэглэж болно. 16 дугаар зураг дээрх граф нь хавтгай граф байна гэж үзье. Энэ графын

$$AX,\ XB,\ BY,\ YC,\ CZ,\ ZA$$

ирмэгүүдийг зурчихвал хавтгай дээр битүү муруй үүснэ. Тэгвэл сая тайлбарласан ёсоор:

$$AY,\ BZ,\ CX$$

ирмэгүүдийг огтлолцоогүй байхаар зурж болохгүй[2].

---

[1]Жорданы теоремийн баталгаа K шугам нь хялбархан тодорхойлолттой шугам болох олон өнцөгт байх тохиолдолд ч нилээд төвөгтэй байдаг.

Курант Р и Роббинс Г, Что такое математика, Гостехиздат, М—Л, 1947 гэсэн номын 326—328 ба 353—355 дугаар талуудад энэ теоремийн олон өнцөгт тохиолдлын бүрэн баталгааг бас Александров А. Д, Выпуклые многограники, Гостехиздат, М—Л, 1950 гэсэн номын 69—72 дугаар талд, Гильберт Д, Основания геометрии, Гостехиздат, М—1, 1948, номонд уул номын редакторын П. К. Рашевскийн нэмсэн хэсгийн 409—419 дүгээр талуудад энэ теоремийн (нилээд төвөгтэй тохиолдлуудын) баталгааг үзэж болно. Теоремийн ерөнхий тохиолдолд баталсан баталгааг „Успехи математических наук" сэтгүүлийн 1960 оны 5 дугаар боть, 5 дугаар дэвтрийн Вольверт Э. И, Элементарное доказательство теоремы Жордана (168—172 дугаар тал) ба Филиппов А. Ф. Элементарное доказательство теоремии Жордана) 173—176 дугаар тал гэсэн өгүүллүүдээс үзэж болно.

[2] 114 дүгээр хуудасны дор бичсэн тайлбарт өөр нэг баталгааг дурдав.

Граф гэдэг ухагдхууныг тайлбарлаж байгаа энэ жишээ та нарт чухал зүйл биш шиг харагдаж байгаа байх. Ийм маягийн ухаан сорих бодлогыг ор хэрэггүй зүйл гэж үл болно. Ийм бодлогууд нь математикийн бүхэл бүтэн онол үүсэн хөгжихийн эх үүсвэр болдог явдал цөөнгүй байдаг. Тэмдэг, томьёо элбэгтэй байх нь математикийн үзэл санааны гүнзгий шинж болж тэр болгон чаддаггүйг сануулъя.

Хавтгай графыг практикийн чухал бодлогод хэрэглэх талаар өөр нэг жишээ дурдъя. Дээр тайлбарласан шигээр графыг төсөөлөхөөс гадна бас графын ирмэгүүдийг янз бүрийн газруудыг холбосон цахилгааны шугам юм гэж сэтгэвэл, графыг цахилгаан хэлхээний схем гэж үзэж болно. Радио хүлээн авагч ба зурагт радиогийн нэг загварын цахилгаан схемийг бөөнөөр үйлдвэрлэх үр ашигтай аргын нэг нь схемийг хуванцар юмуу цаасан дэвсгэр дээр металл хальсан хэлбэрээр дармалаар хэвлэхэд оршино. Гэвч ингэж хэвлэж болдог байхын тулд дамжуулагчдын авч үзэж буй хэлхээний граф нь хавтгай граф байх хэрэгтэй юм. Учир нь хоёр ирмэг огтлолцвол системд богино холболт үүсгэхэд хүрэх билээ.

Дасгал

Дөрвөн хөршийн хөрш тус бүр өөрийн байшингаа бусад гурван байшинтай үл огтлолцох замуудаар холбожээ. Тэдний ойр хавьд тав дахь хүн байшин барив.

1. Тэгвэл энэ байшинг үл огтлолцох замуудаар бусад бүх байшингуудтай холбож үл болохыг батал.

2. Тэр байшинг үл огтлолцох замуудаар ямар нэг гурван байшинтай холбож болно гэдгийг үзүүл.

6§. Графын ирмэгийн тоо.

Графыг тэмцээний тоглолтуудын ямар нэг маягийн жагсаалт гэж үзвэл хоёр баг тус бүр бие биетэйгээ сайндаа л нэг удаа тоглоно. Гэвч заримдаа жишээлбэл бейсболын* тэмцээн шиг хоёр баг тус бүр бие биетэйгээ хэд хэдэн удаа тоглох ч явдал тохиолдоно.

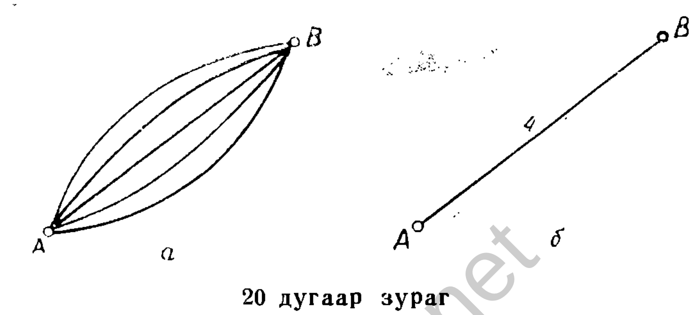
Үүнийг граф дээр харгалзах хос оройнуудыг *хэд*

---

* Үүнтэй адилаар жишээлбэл ССР-ийн хөл бөмбөгийн тэргүүн шалгаруулах ажиллагаа явагддаг. Үүнд баг тус бүр бусадтай 2 удаа тоглодог.

хэдэн ирмэгээр холбон дүрсэлнэ (20 а дугаар зураг) Энэ үед графыг ***давхар ирмэгтэй*** байна гэж хэлнэ.

A ба B-гэсэн тодорхой нэг хос оройн хооронд эдгээр оройг холбогч ирмэг бүрийг нэг бүрчлэн татахын оронд зөвхөн ганц ирмэг татаж энэ ирмэг хэд дахин тоологдох ёстойг ***заах тоог*** бичиж болно (20, б дүгээр зураг). Харин замууд дүрсэлсэн газрын зураг дээр бол зам нэг бүрийг зурах ёстой юм.



20 дугаар зураг

Ямар нэг G графыг тусгаарлагдаагүй A орой нэг бүрд, төгсгөл нь A байх нэг юмуу хэд хэдэн ирмэг байж болно. Энэ ирмэгүүдийг A оройд инцидент (A-д төгсгөлтэй) ирмэгүүд гэж нэрлэдэг. Энэ ирмэгүүдийн тоог $\rho(A)$ гэж тэмдэглэн A оройн зэрэг гэж нэрлэдэг. Жишээлбэл 1 дүгээр зураг дээр дүрсэлсэн графын оройнуудын зэрэг нь

$$\rho(A)=\rho(B)=\rho(D)=\rho(E)=3;$$
$$\rho(F)=4,\ \rho(C)=2$$
байна.

Графын ирмэгийн тоог олох шаардлага олонтой тохиолдоно. Ирмэгүүдийг нэг бүрчлэн шууд тоолж болох боловч орой тус бүр дээрх ирмэгүүдийг тус тусад нь тоолж энэ бүх тоонуудыг нэмж гаргавал хялбар юм. Ингэхэд ирмэг тус бүр нь энэ ирмэгээр холбогдсон хоёр оройд давхар тоологдох учраас графын нийт ирмэгийн тоо нь дээрх нийлбэрийн хагастай тэнцүү байна. Жишээлбэл 1 дүгээр зураг дээрх графын ирмэгийн тоо нь;

$$\frac{1}{2}[\rho(A)+\rho(B)+\rho(C)+\rho(D)+\rho(E)+\rho(F)]=9$$

байна гэдгийг шууд ч шалгаж болно. Энэ үр дүнг ерөнхий байдлаар томьёолохын тулд ямар нэг G граф A_1, A_2, . . . , A_n-гэсэн n-оройтой ба тэдгээрийн зэргүүд

нь харгалзан $\rho(A_1)$, $\rho(A_2)$, . . . , $\rho(A_n)$-тэй тэнцүү байж гэж бодъё. Тэгвэл G графын ирмэгийн тоо N нь өмнө тайлбарласнаар

$$N=\frac{1}{2}[\rho(A_1)+\rho(A_2)+\ .\ .\ .\ +\rho(A_n)] \qquad (1)$$

байна. Дурын графын бүх оройнуудын зэргүүдийн нийлбэр нь

$$\sum_{i=1}^{n}\rho(A_i)=\rho(A_1)+\rho(A_2)+\ .\ .\ .+\rho(A_n) \qquad (2)$$

ирмэгүүдийн тоо хоёр дахин авсантай тэнцүү учир (1) томьёоноос энэ тоо нь тэгш тоо байх нь харагдаж байна.

Графын оройнуудыг $\rho(A')$ зэрэг нь тэгш тоо байх тэгш A^1 оройнууд, $\rho(A'')$ зэрэг нь сондгой тоо байх сондгой A'' оройнууд гэж хоёр ангилж болно. Жишээлбэл 1 дүгээр зураг дээрх графын A, B, D, E-оройнууд нь сондгой, харин C ба F-оройнууд нь тэгш оройнууд юм. Хэрэв оройнуудыг цагаан толгойн эрэмбээр байрлуулбал (2) нийлбэр нь

$$3+3+2+3+3+4=18$$

тай тэнцүү байна. Энд сондгой нэмэгдхүүний тоо нь дөрөвтэй тэнцүү учир энэ нийлбэр нь тэгш юм. Ер нь бүхэл тоонуудын нийлбэр тэгш юмуу сондгой байх нь түүний сондгой нэмэгдхүүний тоо тэгш юмуу сондгой байхаас хамаарах учир нийлбэрийн тэгш сондгойг олохдоо тэгш нэмэгдхүүнийг авч үзэхгүй орхиж болно. Нэгэнт (2) нийлбэр нь ямагт тэгш учир бид дараахь дүгнэлтэд хүрнэ.

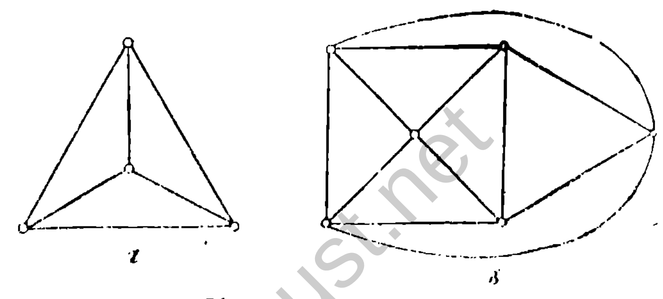
Теорем 1. *Дурын графын сондгой оройнуудын тоо нь тэгш байна.* 0 нь тэгш тоо учир граф ерөөсөө сондгой оройгүй байх тохиолдолд ч энэ дүгнэлт хүчинтэй байна. Бүх оройнуудын зэргүүд нь ижил:

$$\rho(A_1)=\rho(A_2)=\ldots=\rho(A_n)=r$$

графууд байдаг. Тийм графыг ***нэг төрлийн r-зэргийн*** граф гэж нэрлэдэг ба (1) томьёо ёсоор түүний ирмэгийн тоо нь:

$$N=\frac{1}{2}nr$$

байна. Энд n-нь графын оройн тоо юм. 21 а, б зургууд дээрх графууд нь харгалзан гурав ба дөрвөн зэргийн нэг төрлийн графууд юм.



21 дүгээр зураг

n-оройтой бүрэн U_n графын орой тус бүрээс үлдсэн орой бүрд $n-1$ ирмэг очих учир U_n нь $n-1$ зэргийн нэг төрлийн граф юм. Тэг O_n графын орой бүрийн хувьд $\rho(A)=0$ байх учир O_n нь мөн нэгэн төрлийн граф юм.

Дасгал

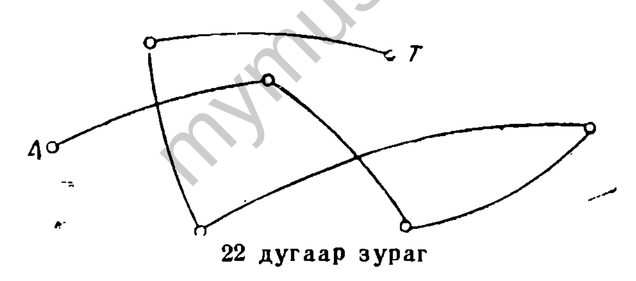
1. (1) томьёог 2 ба 6 дугаар зургууд дээрх графууд хувьд шалга.
2. Эдгээр граф тус бүр дээр сондгой оройнуудын тоо тэгш байхыг шалга.

II БҮЛЭГ

ХОЛБООСТ ГРАФУУД

1§. Кпоненомтууд

Хавтгай байх нь албагүй ямар нэг G граф бидэнд өгөгдсөн байг. Энэ графыг замуудыг дүрсэлсэн газрын зураг гэж сэтгэе. Бид графын ямар нэг A оройгоос эхэлж ямар нэг ирмэг буюу AB замаар явж B станцад хүрээд B-ээс C-д тэднийг холбосон BC замаар хүрэх мэтчлэн аялая.



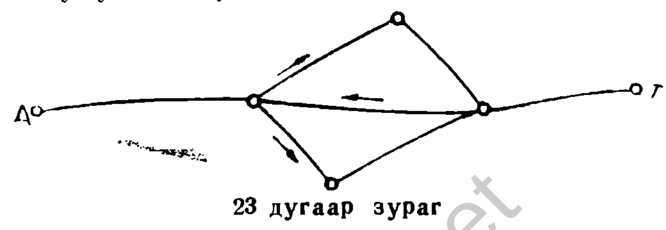
22 дугаар зураг

Бид энэ аялалд ямар ч хязгаарлалтыг тавихгүйгээр нэг оройг хэд хэдэн удаа дайрч гарч болох ба нэг замаар хэд хэдэн удаа явж өнгөрч болно гэж үзье.

Хэрэв бид ийм маягаар явж T оройд хүрч болдог байвал T оройг A оройтой ***холбоотой*** байна гэж хэлнэ. Энэ нь A-гаас T-д хүрдэг зам байна гэсэн үг юм. Ийнхүү явахдаа ямар нэг оройг хоёр юмуу түүнээс олон удаа дайрч гардаг бол манай замаас ямар нэг битүү шугамыг зайлуулан A оройгоос T оройд анхныхаас богино замаар явж хүрч болно. Нэг ч оройг нэгээс илүү дайрахгүй граф дээрх шугамыг ***нум*** гэж

нэрлэнэ. Жишээлбэл 22 дугаар зураг дээр дүрслэгдсэн зам нь нум юм. Графын нэг оройг хэд хэдэн удаа дайрч болох боловч нэг ирмэгээр нэг л удаа явах замыг ***гинж*** гэж нэрлэнэ. (23 дугаар зураг).

Нум бол бүх орой нь ялгаатай гинж юм. Түүнийг мөн эгэл гинж ч гэж нэрлэдэг. Гинж нь битүү, өөрөөр хэлбэл, нэг оройгоос эхэлж тэр орой дээрээ төгссөн байвал түүнийг ***цикл*** гэж нэрлэдэг. Циклийн бүх оройнууд нь хоорондоо ялгаатай байвал түүнийг ***энгийн цикл*** буюу ***эгэл цикл*** гэдэг.



23 дугаар зураг

Ингэхлээр цикл нь зарим оройнууд дээрээ огтлолцож болох ба харин энгийн циклээр тойроход зөвхөн эхний орой л төгсгөлийн цэг болж дахин гарч ирнэ.

Энэ ойлголтуудыг 1 дүгээр зураг дээрх граф дээр тайлбарлая.

Ирмэгүүдийн

$$AFDEFB$$

дараалал нь гинж юм.

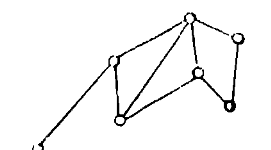
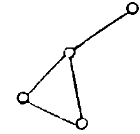
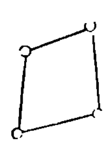
$$ADFEB$$

дараалал нь нум буюу эгэл гинж юм. Харин

$$AFEDFBCA$$

дараалал нь цикл ба $ACBFEDA$ дараалал нь энгийн цикл юм.

Хэрэв графын орой бүрийг бусад аль ч оройтой ямар нэгэн гинжээр холбож болдог байвал түүнийг ***холбоост граф*** гэнэ. Тэг графаас бусад дээр авч үзсэн бүх графууд нь *холбоост* графууд юм. Холбоост биш графын зарим оройгий нь өгөгдсөн A оройтой гинжээр холбож болохгүй. A оройтой гинжээр холбож болдог тийм бүх оройнууд, түүнтэй индидент бүх ирмэгүүд хамтдаа A оройн ***холбоост компонентийг*** үүсгэнэ. Ингэхлээр граф бүхэлдээ бие биетэйгээ ирмэгээр ч, гинжээр ч холбогдоогүй тусгай тусгай холбоост компонентууд болон хуваагдана.

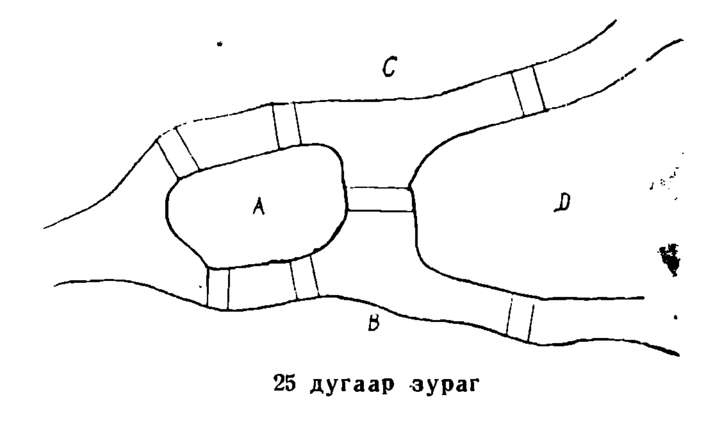
24 дүгээр зураг

24 дүгээр зураг дээр дөрвөн холбоост компонентээс тогтсон бөгөөд нэг компонент нь тусгаарлагдсан цэг байх тийм графыг дүрсэлжээ. Энэ графыг, жишээлбэл, арал бүр нь замын холбоост системтэй бүлэг арлыг дүрсэлсэн газрын зураг гэж үзэж болно. Холбоост биш графыг судлах нь түүний холбоост компонент нэг бүрийн чанарыг судлахад хүргэдэг учир графын онолд голчлон холбоост графуудыг авч үздэг.

2§. Кёнигсбергийн гүүрүүдийн тухай бодлого

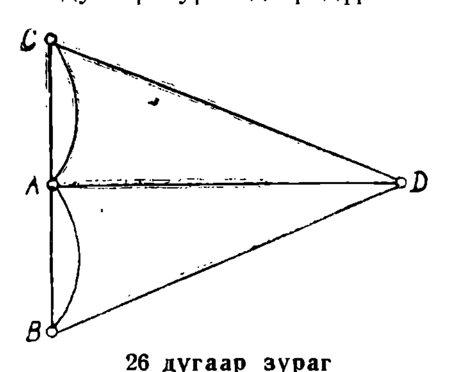
Үүсэн хөгжсөн он, сар нь мэдэгддэг математикийн цөөн салбар байдгийн нэгэнд нь графын онол ордог юм. Графын тухай анхны ажлыг швейцарын математикч Леонард Эйлер (1707—1783) Петербургийн Шинжлэх Ухааны Академийн хэвлэлд 1736 онд хэвлүүлжээ. Эйлер нь шинжлэх ухааны түүхэнд нэрээ гоц үлдээсэн эрдэмтдийн нэг байв. 1727 онд дөнгөж 20 нас хүрч байхад нь түүнийг Оросын шинжлэх ухааны академи урин авчирч ажиллуулжээ. Тэр, математик, физик ба одон орны судалгаанд биеэ зориулахаасаа өмнө шашны сургаал, дорно дахины хэл ба хүн эмнэлгийг судалж байв. Тэрээр энэ бүх салбаруудаар гялалзсан амжилтанд хүрч маш олон тооны бүтээл туурвижээ.

Графын тухай ажлаа бичих үед түүний өрөөсөн нүд хараагүй болсон ба өтөл насандаа бүрмөсөн сохорсон боловч түүний ажлын эрчим суларсангүй. Нилээд дээр үеэс Швейцарын математикчид, тухайлбал түүний төрөлх Базель хотын математикчид Эйлерийн зохиолын бүрэн эмхтгэлийг хэвлэж эхэлсэн бөгөөд одоо 50 боть хэвлэгдээд байна. Анхандаа нийт ботийн тоо 100 орчим болох байх гэж үзэж байсан нь одоо 200 дөхөх нь гэж үзэж байна.



25 дугаар зураг

Эйлер графын тухай ажлаа «Кёнигсбергийн гүүрүүдийн тухай бодлого» гэдэг нэг ухаан сорих бодлогыг авч үзсэнээр эхэлжээ. Кёнигсберг (одоогийн Калинград) хот нь Прегель (Преголи) голын хоёр талд хоёр арал дээр оршино. Хотын хэсгүүд хоорондоо долоон гүүрээр холбогдоно. Бүтэн сайн өдөр хотын хүмүүс хотоор зугаацаж явна. Гэрээсээ зугаацахаар явсан хүн гүүр болгоноор яг нэг нэг удаа гараад гэртээ буцаж ирж болох уу гэсэн асуудал байв. 25 дугаар зураг дээр Кёнигсбергийн газрын тоймлосон зургийг дүрслэв. Хотын дөрвөн хэсгийг A, B, C ба D үсгээр тэмдэглэжээ. Гүүрүүдээр гарах тухай асуудлыг л бид сонирхож байгаа учраас A, B, C, D-г ирмэгүүд нь гүүрүүдэд харгалздаг ямар нэг графын оройнууд гэж үзэж болно. Энэ графыг 26 дугаар зураг дээр дүрслэв.



26 дугаар зураг

Энэ граф нь ганц цикл биш өөрөөр хэлбэл аль ч оройгоос эхэллээ ч,ямар ч ирмэгээр 2 удаа оролгүйгээр бүх графыг тойрч анхны оройдоо эргэж ирж чадахгүй гэдгийг Эйлер үзүүлжээ. Үнэндээ тийм цикл оршин байсансан бол графын орой бүр дээр хичнээн ирмэг ирсэн байна түүнээс төчнөөн ирмэг гарсан, өөрөөр хэлбэл орой бүр дээрх ирмэгийн тоо нь тэгш байхсан билээ. Гэтэл энэ нөхцөл Кёнигсбергийн газрын зургийг дүрсэлж буй графын хувьд биелэхгүй нь илэрхий.

3§. Эйлерийн графууд

Эйлер өөрийн ажилдаа Кёнигсбергийн гүүрүүдийн тухай бодлогын шийдийг тайлбарлаад ямар графид ирмэг бүрийг нь зөвхөн нэг удаа агуулсан циклийг олж болох вэ? гэсэн графын онолын нэгэн ерөнхий асуудлыг дэвшүүлжээ. Тийм циклийг бид ***Эйлерийн шугам***, харин Эйлерийн шугамтай графыг ***Эйлерийн граф*** гэж тус тус нэрлэе.

Граф Эйлерийн шугамтай байхын тулд граф нь холбоост граф байх ёстой. Кёнигсбергийн гүүрүүдийн тухай бодлогоос үзсэн ч Эйлерийн шугам бүр нь орой тус бүрд хэдэн удаа орсон байна, түүнээс төчнөөн удаа гарсан байх ёстой. Өөрөөр хэлбэл графын оройн бүрийн зэрэг нь тэгш байх ёстой нь илэрхий байна. Граф холбоост байх ёстой ба түүний бүх оройнуудын зэрэг нь тэгш байх ёстой гэсэн граф Эйлерийн шугамтай байхын хоёр зайлшгүй нөхцөлийг бид олов. Эдгээр нөхцөлүүд нь мөн хүрэлцээтэй гэдгийг Эйлер баталжээ.

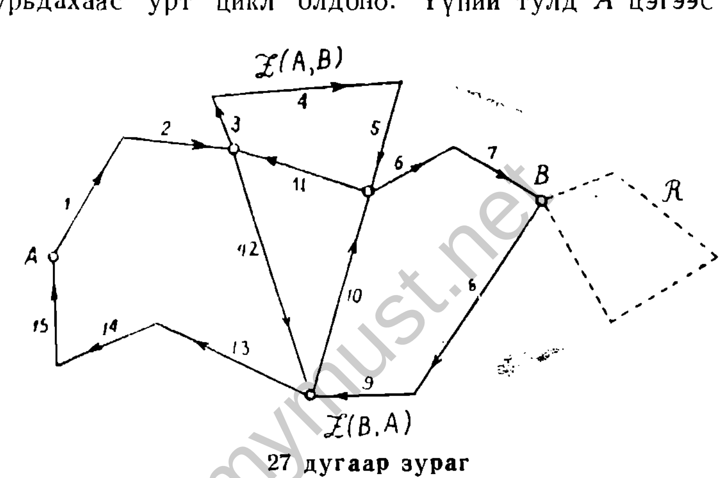
Теорем 1. *Бүх оройнуудын зэрэг нь тэгш холбоост граф Эйлерийн шугамтай байна.*

Баталгаа. Бид ямар нэг A оройгоос Z гинжийг эхэлж өмнө авагдаагүй шинэ шинэ ирмэг оруулан бололцооны хэрээр аль болох хол үргэлжлүүлжээ гэж бодъё. Графын ирмэгүүдийн тоо төгсгөлтэй учир энэ процесс нь хэзээ нэг цагт төгсөнө. Нэгэнт орой бүр дээрх ирмэгийн тоо тэгш учраас эхний оройгоос бусад орой бүрээс гарах гарц бий. Ийм учраас Z гинж нь эхний A орой дээрээ ирж төгсөх ёстой (27 дугаар зургийг хар).

Хэрэв Z нь графын бүх оройг дайрдаг бол энэ нь бидний сонирхож байгаа Эйлерийн шугам маань болно.

Хэрэв Z нь графын зарим оройгоор дамжихгүй бол Z гинжид харьяалагдахгүй, ямар нэг ирмэгт инцидент бөгөөд манай гинж дээр орших ямар нэг B орой олдоно. Нэгэнт Z гинж нь B орой дээрээ тэгш тооны ирмэгтэй учир Z-д хамаардаггүй, B-гээс гарсан ирмэгүүдийн тоо нь мөн тэгш байна. Энэ дүгнэлт бусад бүх оройнуудын тухайд ч хүчинтэй.

Одоо бид Z гинжид хамаардаггүй ирмэгийг хэрэглэн оройгоос шинэ R гинжийг эхэлье. Энэ гинж нь B цэг дээр ирж төгсөх нь илэрхий. Тэгвэл A цэгээс эхэлсэн урьдахаас урт цикл олдоно. Үүний тулд A цэгээс B



27 дугаар зураг

хүртэл Z гинжээр, дараагаар нь R циклээр B цэгт ирээд Z гинжийн үлдсэн хэсгээр явж A цэгт эргэж ирж болно (27 дугаар зургийг хар), хэрэв бид бүх графыг бас л тойрч чадаагүй бол энэ замыг дахин өргөтгөж болно гэх мэт цааш үргэлжлүүлбэл бидний сонирхож буй Эйлерийн шугам гарна.

Эйлерийн шугамыг зурах тухай бодлого, өөрөөр хэлбэл цаасан дээр ямар нэг шугам бүдгээр дүрслэгдсэн байхад түүн дээгүүр харандаагаа салгалгүй явуулж тодруулахдаа урьд нь тодруулсан хэсгийг давталгүйгээр бүх шугамыг тодруулж болох эсэхийг тогтоох тухай бодлого нь математикийн зугаатай бодлогын ихэд дэлгэрсэн хэлбэр юм.

Бид энэ хүртэл графын ирмэг бүрээр яг нэг нэг удаа дайрсан циклийн тухай авч үзлээ. Тэгвэл одоо

Ийм чанартай гинжийг эрж олох тухай бодлогыг авч үзэж болно. A оройгоос эхэлж бүх ирмэгээр нь яг нэг нэг удаа дайрч ямар нэг өөрөөр B оройд ирж тэгссэн тийм $Z(A, B)$ гинж графад байна гэж бодъё. Энэ гинж A оройгоос эхлэн явавч сүүлдээ магадгүй A оройд нэг биш удаа буцаж ирсэн байж болох юм. Хэрэв энэ гинж нь орой дээр төгсөхгүй бол A орой нь сондгой орой байх ёстой. Үүнтэй адил шалтгаанаар B орой нь сондгой байх ба гэтэл графын бусад бүх оройнууд нь тэгш байна. Энэ нь биднийг дараахь теоремд хүргэнэ.

Теорем 2. *Холбоост графад, түүний бүх ирмэгийг яг нэг нэг удаа агуулсан $Z(A, B)$ гинжтэй байх гарцаагүй ба хүрэлцээтэй нөхцөл нь зөвхөн A, B хоёр л графын сондгой орой байх явдал мөн.*

Батлахын тулд графад шинэ AB ирмэгийг нэмж зурвал л хангалттай. Тэгвэл графын бүх оройнууд нь тэгш болно. Энэ шинэ граф нь эмнэх теорем ёсоор Эйлерийн ямар нэг P шугамтай байх ба хэрэв бид P шугамаас AB ирмэгийг зайлуулбал эрж буй $Z(A, B)$ гинж үлдэнэ. Жишээ болгон 6 дугаар зураг дээр дүрсэлсэн графын $FCDBAEC$ гинжийг дурьдаж болно. Энэ граф нь F ба C гэсэн хоёр л сондгой оройтой байна.

Олсон үр дүнгүүдээ өргөтгөхийг математикчид ямагт хичээдэг билээ. Дурын графид аль ч хоёр нь ерөнхий ирмэггүй нийтдээ бүх графыг бүрхэж чаддаг тийм хамгийн цөөн тооны гинжийг олохыг бид хичээе. Хэрэв графыг дурдсан чанар бүхий гинжүүдээр бүрхэж болдогсон бол графын сондгой орой бүхэн нь ядаж нэг тийм гинжийн эхний ба төгсгөлийн цэг нь тодорхой болж эсрэг тохиолдолд тэгш болоход хүрнэ. Нэгдүгээр бүлэгт үзүүлсэн ёсоор графын сондгой оройнуудын тоо тэгш. Жишээлбэл $2k$ гэсэн, тоо байна. Иймд графыг бүрхдэг гинжүүдийн бүл Z нь доор хаяж k гинжээс тогтох ёстой. $2k$ ширхэг сондгой орой оршин байх нь тийм k гинж оршин байхын хүрэлцээтэй нөхцөл мөн гэдгийг одоо бид үзүүлье.

Теорем 3. *$2k$ сондгой оройтой дурын холбоост графад нийтдээ графын бүх ирмэгүүдийг яг нэг нэг удаа агуулдаг гинжээс тогтсон бүл олдоно.*

Баталгаа. Графын сондгой оройнуудыг ямар нэг эрэмбээр авч

$$A_1, A_2, A_3, \cdots, A_k; B_1, B_2, \cdots, B_k$$

гэж тэмдэглээ.

Хэрэв бид манай графад

$$A_1B_1, A_2B_2, \cdots A_kB_k$$

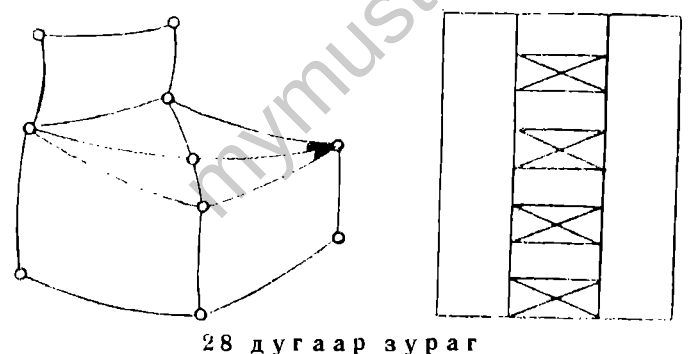
гэсэн k ирмэг нэмбэл түүний бүх оройнууд нь тэгш болох ба энэ графад Эйлерийн шугам P олдоно. Нэмсэн ирмэгүүдийг зайлуулбал P шугам нь графын бүх ирмэгийг агуулсан k ширхэг гинж болж хувирна.

1 дүгээр зураг дээр дүрсэлсэн графыг жишээ болгон авъя. Энэ нь A, B, D, E гэсэн дөрвөн сондгой оройтой ба $EBFA$, $BCADFED$ гэсэн хоёр гинжээр бүрхэгдэнэ.

Дасгал

1. 28 дугаар зураг дээрх граф тус бүрийг бүрхэхэд хичнээн гинж хэрэгтэй болохыг тодорхойл.

2. Дээр авч үзсэн бүх графуудын хувьд 1 дүгээр дасгалд тавьсан асуудлыг хариул.



28 дугаар зураг

3. Дөрөв ба таван оройтой бүрэн графуудын хувьд тэднийг бүрхдэг гинжүүдийг ол. Гаргасан үр дүнгүүдээ өргөтгөхийг хичээ.

4 §. Зөв замыг эрэх

Ямар ч үзэсгэлэнгийн дэвсгэр зураг (план) нь Эйлерийн граф байх ёстой баймаар байна. Тэгвэл, үзэгчид үзмэр бүрийг яг нэг нэг удаа үзэж өнгөрөхийн тулд

яаж ямар чиглэлээр явбал зохихыг заасан тэмдгүүдийг үзэсгэлэнгийн байр дотуур байрлуулан тавьж болохсон билээ. Үзмэрүүд нь амьдралд ихэвчлэн тохиолддог шиг үзэсгэлэнгийн дэвсгэр газраар явж өнгөрдөг бүх замуудын хоёр талаар байрласан байжээ, гэж үзье. Тэгвэл үзэсгэлэнгийн дэвсгэр зурагт харгалзах граф нь (хэрэв граф холбоост л бол) ямар ч байлаа гэсэн үзэгчдийг зам нэг бүрээр хоёр удаа, өөрөөр хэлбэл чиглэл бүрээр нэг нэг удаа явсан байхаар газарчилж болдог байна. Үүнийг батлахын тулд графын бүх ирмэгүүдээр чиглэл бүрээр яг нэг удаа дайрч өнгөрдөг гинжийг байгуулах ерөнхий дүрмийг өгье. Бид энэ гинжийг дурын A_0 оройгоос эхлэн ямар нэг $\varepsilon_0=(A_0, A_1)$ ирмэгээр явж, бидний сонгон авсан чиглэлийг заасан бяцхан сумыг A_1 цэг дээр тавьж энэ ирмэгийг тэмдэглэе. Дараагаар нь өөр оройнуудад дараалан шилжье. Ингэхдээ тодорхой нэг орой дээр хэд хэдэн удаа ирж болох юм. Бид ямар нэг орой дээр ирмэгцээ харгалзсан ирмэгт ирсэн чигийг заасан сумыг тавьж байх болно.

Түүнээс гадна ямар нэг орой дээр анх удаагаа ирвэл энэ оройд хүрч ирсэн ирмэгээ бусдаас хожим ялгаж чаддаг байхын тулд түүнийг ямар нэг онцлог тэмдгээр бид тэмдэглэж байя. Оройгоос гарахдаа бид урьд нь хэрэглээгүй чиглэлийг ямагт сонгож авч байх болно. Тодорхой хэлбэл урьд нь ор явж өнгөрөөгүй ирмэг юм уу эсвэл түүгээр бид хүрч ирснийг нь заасан сумтай ирмэгийг хэрэглэж байх болно. Ашиглагдаагүй чиглэлтэй гарах ирмэгийг сонгох боломжгүй болчихвол, саяа, бид энэ оройд анх түүгээр ирсэн ирмэгээ гарах ирмэг болгон ашиглахаар тохиров. Энэ ярвигтай замыг боломжийн хэрээр бид үргэлжлүүлье. Манай графын орой бүр гарах ба орохын ижил тооны боломжтой байна. Ийм учраас энэ ажиллагаа нь зөвхөн анхны A_0 орой дээр л төгсөж болно. Одоо графын бүх оройнууд дээр ирмэг бүрийг хоёр чиглэлээр явж өнгөрсөн гэдгийг л шалгах үлдлээ.

A_0-цэгийн хувьд түүнээс гардаг бүх ирмэгүүд ашиглагдсан байх нь илт. Тийм биш бол бид цааш явж чадах тул бүх ордог ирмэгүүд ч бүгд хэрэглэгдчихсэн болно. Учир нь тэдний тоо нь гардаг ирмэгүүдийн тоотой тэнцүү билээ. Тийнхүү $\varepsilon_0=(A_0, A_1)$ ирмэгийг хоёр чиглэлийн дагуу явж өнгөрсөн байна. Энэ нь A_1 оройд инцидент бүх ирмэгүүдийг мөн хоёр чиглэлийн дагуу ч

явж өнгөрсөн гэсэн үг юм. Учир нь A_1 оройд хамгийн эхлээд орсон A_0A_1 ирмэг нь дээрх нөхцөл ёсоор гардаг ирмэг болж зөвхөн хамгийн эцэст ашиглагдах ёстой билээ. Мөн энэ сэтгэлгээг дараагийн $\varepsilon_1 = (A_1, A_2)$ ирмэг ба дараагийн A_2 оройд гэх мэтчилэн хэрэглэж болно. Ийм учраас хүрч болдог бүх оройнуудын бүх ирмэгүүдийг хоёр чиглэлээр нь явж өнгөрч болно. Нэгэнт манай граф нь холбоост граф учир түүний бүх ирмэгүүдийг нь чиглэлээр нь явж өнгөрч болно.

Графын бүх ирмэгүүдээр ингэж явж өнгөрөх энэ аргыг олон зорилгод ашиглаж болно. Жишээлбэл Лабиринтаас гарч болох замыг олоход юмуу эсвэл хэрэв та нар олон салаалсан ямар нэг агуй дотор санамсаргүй төөрчихвөл агуйгаас гарах замыг эрж олоход энэ аргыг хэрэглэж болно.

Дасгал

1. Энд тайлбарласан аргыг 1 бүлгийн 1 §-ийн графуудад хэрэглэ.

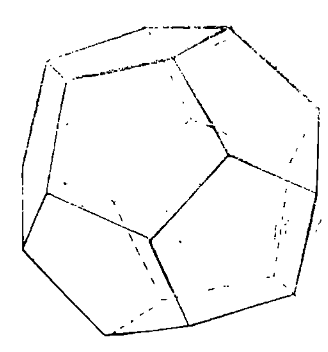
5 §. Гамильтоны шугам

Ирландын нэрт математикч сэр[1] Уильям Роуэн Гамильтон 1859 онд ухаан сорих нэг өвөрмөц тоглоомыг зохиож худалдаанд гаргажээ. Түүний үндсэн хэсэг нь модоор хийсэн зөв додекаэдр (29 дүгээр зураг) байв. Додекаэдр нь зөв олон талстуудын нэг ба тэр нь 12 зөв таван өнцөгт 20 оройтой бөгөөд орой нэг бүр дээр нь гурван ирмэг нийлнэ.

Гамильтоны додекаэдрийн орой нэг бүр Брюссель, Кантон, Дели, Франкфурт гэх зэрэг томоохон хотуудын нэрээр тэмдэглэгдсэн байв. Додекаэдрийн ирмэгүүдийн дагуу явж хот нэг бүрээр яг нэг удаа дайрч гарах замыг олоход тоглоомын зорилгоор оршиж байв. Тоглоомыг сонирхолтой болгохын тулд эхний хэдэн хотыг ямар эрэмбээр дайрч өнгөрөх нь урьдчилан тогтоогдсон байв. Додекаэдрийн орой бүрд хадсан том тавтай хадааснуудад утсыг ороон торгоож, энэ утсаар явж өнгөрсөн замаа тэмдэглэдэг байв. Ийм додекаэдр хэтэрхий нүсэр байсан учир Гамильтон олон талстыг,

[1] Англи хэл дээр эрэгтэй хүнд хандаж хэлэх хүндэтгэлийн үг.

түүний ирмэгүүдийн үүсгэдэг графтай изоморф хавтгай графаар (30 дугаар зураг) сольж зохиосон тоглоомыхоо өөр нэг хувилбарыг санаачилжээ.



29 дүгээр зураг.

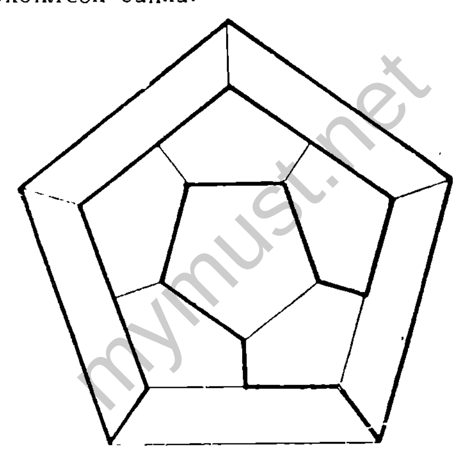
Додекаэдраар аялах тухай энэ бодлого нь ямар нэг өргөн амжилтад хүрээгүй юм. Гэвч математикчдын дунд энэ бодлогын тухай дурсамж хадгалагдан үлджээ. Тийнхүү графын орой бүрийг яг нэг нэг удаа дайрсан циклийг ***графын Гамильтоны*** шугам гэж одоо нэрлэх болсон юм. Гамильтоны шугам нь орой бүрийг яг хоёр ирмэгээр дайрч өнгөрөх учир тэр нь ерөнхийдөө графын бүх ирмэгийг бүрхэж чадахгүй. 30 дугаар зураг дээр дүрслэгдсэн цикл нь Додекаэдрийн Гамильтоны шугам юм.

Эйлерийн ба Гамильтоны шугамуудын хооронд илэрхий төсөө байгаа нь бидэнд ажиглагдаж байна. Эйлерийн шугам графын ирмэг бүрийг, Гамильтоны шугам орой бүрийг дайрч өнгөрнө. Хэдийгээр ийм төсөө байгаа болович энэ бодлогууд нь хүнд хөнгөнийхөө талаар ялгаатай юм. Ямар нэг граф Эйлерийн граф мөн үү, биш үү гэдгийг мэдэхийн тулд түүний бүх орой тэгш үү гэдгийг л шалгавал хүрэлцээтэй. Гэтэл Гамильтоны шугамын хувьд тийм ерөнхий шинжүүр одоо хүртэл олдоогүй байгаа нь графын онолын олон асуудал нь тодорхой графуудад Гамильтоны шугам бий юу? гэдгийг хариулахад хүргэдгийг анхаарвал нэн харамсалтай юм.

„Хэсэн явагч худалдаачны тухай бодлого“ нь Гамильтоны шугамыг эрэх бодлогыг санагдуулдаг ба энэ

бодлогыг бодох ерөнхий арга бас л бидэнд мэдэгдээгүй байна. Хэсэн явагч худалдаачин гэртээ буцаж ирэхийн өмнө хэд хэдэн хотоор орох ёстой болжээ.

Худалдагч энэ ажлыг аль болох хурдан юмуу, эсвэл аль болох бага зардалтайгаар хийх сонирхолтой нь мэдээж. Хотуудын хоорондох зам, тэдний хооронд янз бүрийн эрэмбээр аялах зардал, хугацаа, тооцоолсон элдэв хувилбаруудыг авч үзэн тэднийг дараалан жиших аргаар энэ бодлогыг бодож болох юм. Хотуудын тоо олон байвал ингэж бодох нь бараг бололцоогүй шахам бодлого. Гэвч зарим нүсэр тохиолдолд энэ бодлогыг бодсон байдаг. Жишээлбэл Америкийн нэгдсэн улсын гол хотуудыг дайрсан агаарын хамгийн богино цикл замыг тодорхойлсон байна.



30 дугаар зураг.

Дасгал

1. 1 ба 2 дугаар зураг дээрх графуудад Гамильтоны шугам бий юү.

2. A_1 хотод суудаг худалдаачин A_2, A_3, A_4 хотуудаар явахаар шийджээ. Хотуудын хоорондох зай нь:

$$A_1A_2 = 120;\ A_1A_3 = 140,\ A_1A_4 = 180$$
$$A_2A_3 = 70,\ A_2A_4 = 100,\ A_3A_4 = 110$$

байв. A_1хотоос гарч бусад гурван хотыг дайрсан хамгийн богино цикл замыг ол.

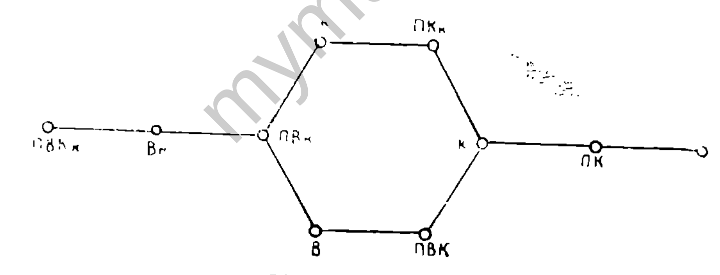
6 §. Ухаан сорих бодлогууд ба графууд

Өмнө зүйлд бид графын нэгэн оройгоос нөгөөд очсон замыг эрж олох асуудлыг сонирхсон билээ. Ийм бодлогуудыг ямар нэг тоглоомын төрөл мэт үзэж бо-

лох ба хэдийгээр эдгээр бодлогууд гэнэн зугаа мэт санагдавч үүнд л ухаан сорих олон бодлого ба зарим тоглоомуудын гол агуулга нь оршдог юм.

„Усчны тухай бодлого“ гэдэг эртний нэг бодлогыг ашиглан өмнө дурдсан зүйлийг тайлбарлая. Чоно (ч), ямаа (я), шуудай байцааг (б), усчинг (у) гол гаргах хэрэгтэй болжээ. Усчин жижигхэн завьтай учраас нэг ээлжинд дээрх зүйлсийн зөвхөн нэгий нь л авч гарч болох байв. Түүнээс гадна чоныг ямаатай хамт эсвэл ямааг байцаатай хамт үлдээж болохгүй байв. Тэгвэл яаж усчин эдгээрийг ус гаргах вэ? Энд байж болох бүх тохиолдлуудыг бид авч үзье.

Эхний ээлжинд зөвхөн ямааг л авч гарч болох нь илт. Тэгвэл анх байсан у, ч, б гэсэн гурван юм ч, б гэсэн бүлгээр солигдоно. Дараа нь усчин буцаж ирнэ. Тэгвэл у, ч, б гэсэн бүлэг гарна. Хоёрдугаар ээлжинд тэр нэг бол ч-г нэг бол б-г авч гарч болох ба үүнтэй харгалзан нэг бол б, нэг бол ч үлдэнэ. Энэ хоёр тохиолдлын алинд ч усчин я-г буцааж авчрах хэрэгтэй болох ба тэгвэл наад эргэн дээр нэг бол у, я, б гэсэн бүлэг үлдэнэ. Дараагийн ээлжинд тэр ч-г эсвэл б-г авч гарах ба наад эргэн дээр зөвхөн я л үлдэнэ. Эцэст нь тэр ганцаараа буцаж ирээд я-г гаргана.



31 дүгээр зураг

Иймд энэ хялбар бодлогын хувьд 31 дүгээр зураг дээр дүрслэгдсэн хөдөлгөөнүүд л боломжтой байна. Энэ нь бодлогын шийдийг хоёр аргаар олж болохыг харуулж байна. Арга тус бүр нь у, ч, я, б гэсэн анхны байдлыг эцсийн „хоосон“ байдалтай холбосон ямар нэг гинжээр тодорхойлогдоно.

„Хартай гурван хар хүний тухай бодлого“ Энэ бодлоготой маш төсөөтэй юм. Эрэгтэй, эмэгтэй гурван хос бүтэн сайн өдөр голын эрэг дээр ирж зөвхөн хоёр хүн л сууж болох бяцхан завь олжээ.

Хар хүн нь бүгд хартай учир хэн нь ч эхнэрээ ган-цааранг нь орхиж тэвчихгүй учраас гол гатлах асуудал төвөгтэй болжээ.

63	22	15	40	1	42	59	18
14	39	64	21	60	17	2	43
37	62	23	16	41	4	19	58
24	13	38	61	20	57	44	3
11	36	25	52	29	46	5	56
26	51	12	33	8	55	30	45
35	10	49	28	53	32	47	6
50	27	34	9	48	7	54	31

32 дугаар зураг

2	3	4	3	2
3	4	6	4	3
4	6	8	6	4
3	4	6	4	3
2	3	4	3	2

33 дугаар зураг

Энэ бодлогын бололцоот хөдөлгөөнийг графыг зурж тэд ус яаж гатлах аргыг зааж өгөхийг уншигчдад үлдээе. Энэ жишээнүүдээс харвал графыг ямар нэг тоглоом гэж үзэж болох байна. Түүний оройнууд нь янз бүрийн байрлал ба ирмэгүүд нь уул тоглоомын дүрэмд зөвшөөрөгдсөн хөдөлгөөнүүдэд (нүүдлүүдэд) харгалзана. Графын ирмэгээр явж өгөгдсөн нэг байрлалаас нөгөөд хүрч болох эсэхийг тогтооход тоглоомын гол зорилго оршино. Өгөгдсөн хоёр байрлал нь графын холбоост нэг компонентод хамаарах уу, үгүй юу гэж энэ бодлогыг графын онолын хэлэн дээр томьёолж болно.

Шатрын хөлгөн дээр жирийн дүрмээр морь нүүх нүүдлүүдийг дараагийн хялбар жишээ болгон авч үзье. Шатрын хөлөг нь 64 буудалтай учир харгалзах граф нь 64 оройтой байна. Дурын эхний буудлаас мориор дурын өөр буудалд хүрч болохыг харахад хялбархан юм. Иймд энэ тоглоомын граф нь холбоост граф юм. Шатрын тухай эртний зарим гар бичмэлүүдэд морь ямар нэг дурын буудлаас эхлэн нүүж буудал бүрд нэг нэг удаа бууж эхнийхээ буудалд эргэж ирж болох уу? гэсэн асуудал тохиолддог.

Энэ нь манай графад Гамильтоны шугам олох бодлоготой адил чанартай болох нь илт. Энэ бодлогын олон шийд байдаг. Тэдний нэгий нь 32 дугаар зураг дээр үзүүлжээ. Моринд шатрын хөлгөн дээр боломжит хөдөлгөөн нилээд олон бий. Нүүдэл бүрийг яг нэг нэг удаа агуулсан тийм цикл оршин байх уу гэсэн асуудлыг тавьж болно. Энэ нь манай графад Эйлерийн шугам байгуулахад харгалзана. Дээр тогтоосон үр дүн ёсоор энэ асуудлыг шийдвэрлэхийн тулд графын бүх оройнууд тэгш эсэхийг тогтоох ёстой юм. Буудал нэг бүрийн хувьд энэ буудлаас морь хэдэн янзаар нүүж болохын тоог, өөрөөр хэлбэл, харгалзах графын бүх оройнуудын зэргийг буудал нэгбүрийн хувьд зааж, 33 дугаар зураг дээр дүрсэлжээ. Эндээс үзвэл 8 буудал нь сондгой зэрэгтэй байна. Ингэхлээр энэ граф Эйлерийн шугамтай байж болохгүй.

Дасгал

1. Шатрын хөлгөн дээр морь хэдэн янзаар нүүж болох вэ?

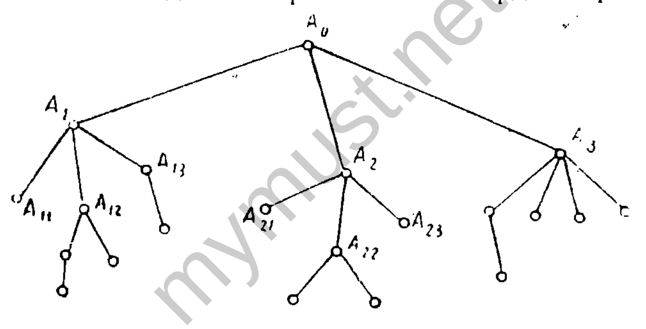
2. Шатрынноёны хувьд харгалзах бодлогуудыг бод.

3. 33 дугаар зураг дээр мөр бүрийн тоонуудын нийлбэр нь багана бүрийн тоонуудын нийлбэр нэгэн ижил 260-тай тэнцүү байхыг шалга.

III БҮЛЭГ
МОД

1 §. Мод ба ой

Циклүүдийг агуулаагүй холбоост графыг ***мод*** гэж нэрлэдэг. Тухайлбал тийм граф нь давхар ирмэггүй байна. Хос орой бүрийн хувьд тэднийг холбосон ганц гинж оршин байх нь модын тодорхойлолтоос мөрдөн гарна.



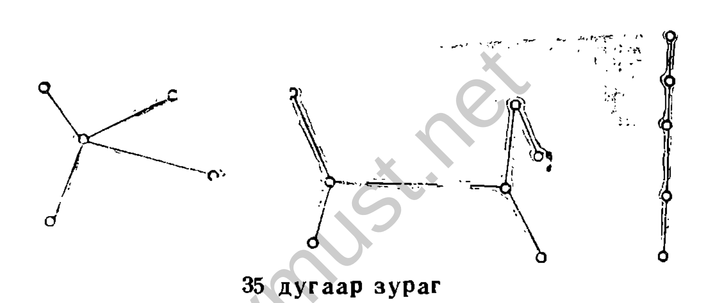
34 дүгээр зураг

Ерөнхийдээ хэрэв граф холбоост биш ба циклүүдийг агуулаагүй бол түүний холбоост компонент бүр нь мод байна. Тийм графыг ургамлын судлалын нэр томьёог хэрэглэн ой гэж нэрлэдэг. Модыг байгуулахын тулд ямар нэг A_0 оройг сонгон авна. A_0 оройгоос түүнтэй зэргэлдээ A_{11}, A_{12}, ... A_{21}, A_{22} ... гэх мэтчилэн оройнуудад ирмэгүүдийг татна (34 дүгээр зураг). Анх сонгон авсан A_0 оройг модны үндэс гэж нэрлэх ба модны орой бүрийг түүний үндэс гэж үзэж болно. Нэгэнт мод циклгүй учир A_0 оройгоос гарсан ялгаатай гинжүүд (мөчрүүд) нь жинхэнэ модны мөчрүүд шиг бие биеэсээ тусгаарлагдсан байна. Тийм графын мөчир бүр нь төгсгөлийн ирмэг буюу түүнээс ганц ч ирмэг гараагүй тийм эцсийн

оройтой ирмэгтэй байна. Энэ тайлбар ёсоор модыг түүний оройнуудад ирмэг дараалан нэмж залган байгуулж болох нь харагдаж байна. Энэ нь модны ирмэгийн тоог тооцож олох боломж өгнө. Хамгийн хялбар мод нь зөвхөн ганц ирмэгтэй буюу бүр тодорхой хэлбэл, тэр нь хоёр орой ба нэг ирмэгээс тогтоно. Мөчрийн төгсгөлд нэг ирмэг нэмэх болгонд л нэг орой нэмэгдэх учраас дараахь дүгнэлт хүчинтэй.

Теорем 1. *n-ройтой мод нь $n-1$ ирмэгтэй байна.*

Ганц мод авч үзэхийн оронд компонент бүр нь мод байх k компоненттай ойг одоо авч үзье (35 дугаар зураг).



35 дугаар зураг

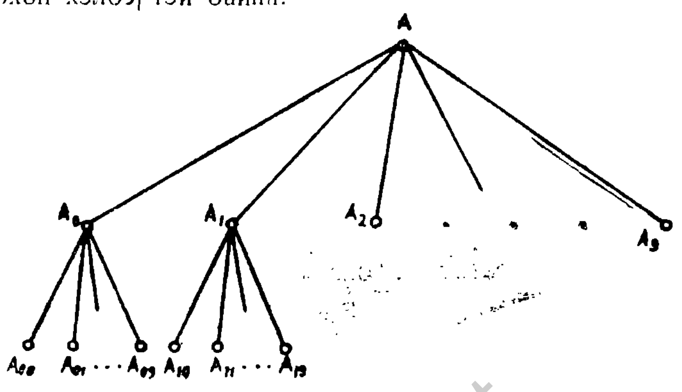
Компонент тус бүрийн ирмэгийн тоо нь түүний оройн тооноос нэгээр дутуу байх учир дараахь теорем хүчинтэй.

Теорем 2. *n оройтой, k компонентаас тогтсон ой нь $n-k$ ирмэгтэй байна.*

Модыг олон зүйлд хэрэглэж болно. Ангилааны процесс бүхэн ямар нэг модоор дүрслэгддэгийг энд тэмдэглэе. Жишээлбэл 34 дүгээр зургийг шуудангийн захидал ангилах процесс гэж үзэж болно. Анх байсан бүх захидлуудыг A_0 гэж тэмдэглэе. Улс орон дотроо тараагдах захидлууд A_1, Европ руу явах захидлуудыг A_2, Алс дорнотын захидлуудыг A_3 гэх мэтчлэн тэмдэглэе. Орон нутгийн A_1 захидлууд нь дорнод, өрнөд, төвийн; европын A_2 захидлууд нь улс орноор гэх мэтчлэн хуваагдана.

Перфокартуудыг ангилах процесс нь мөн л иймэрхүү графаар дүрслэгдэх боловч нүхнүүд нь перфокарт

дээр зөв зурвасуудаар байрласан ба зурвас бүрд 10 байр байх учир энд харгалзах мод нь голдуу бүр ч тодорхой хэлбэртэй байна.



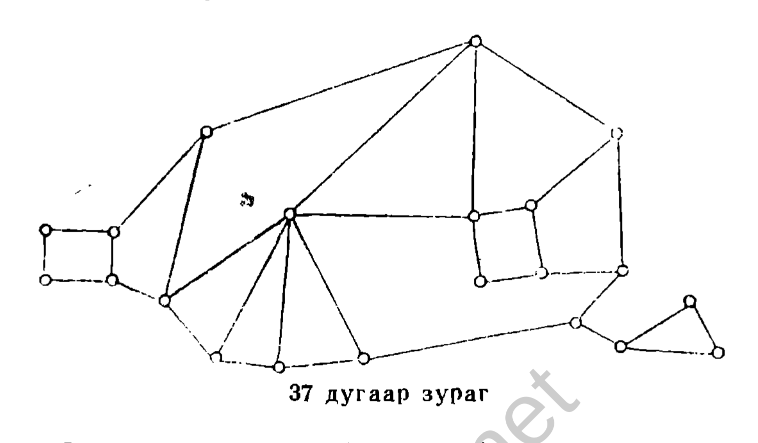
36 дугаар зураг

Ийм учраас перфокартуудыг цухнүүдээр нь хувчарилах нь нэгдүгээр зурвасын хувьд A_0, A_1, $\cdots$, A_9 гэсэн 10 боломж байх ба боломж тус бүр нь A_{00}, A_{01}, $\cdots$, A_{09} гэсэн 10 боломжтой байв гэх мэтчлэн байна. (36 дугаар зураг) Энэ процессийг нэгдүгээр, хоёрдугаар гэх мэтчлэн цифрүүдээс хамааруулан бүхэл тоонуудыг бүлгүүдэд хуваарилах процесс гэж үзэж болно. Ер нь мод бүрийг маш ерөнхий ямар нэг тоон системийн дүрслэл гэж үзэж болно.

2 §. Цикл ба мод

Бид одоо авч үзэх бодлогоо хөдөө аж ахуйн нэр томьёогоор томьёолъё. 37 дугаар зураг дээр ямар нэг фермийн тариалангийн талбайн газрын зургийг дүрсэлжээ. Энэ нь ямар нэг арал дээр байгаа, цагаан будааны тариалангийн хэд хэдэн талбайн зураг юм гэж саная. Талбайнууд нь шороон далангуудаар хүрээлэгдсэн ба бас далангууд нь нуурын усаар хүрээлэгдсэн юм гэж сэтгэе. Ер нь цагаан будаа тариалахдаа зарим нэг далангуудыг сэтэлж эдгээр талбайнуудад ус оруулан услах хэрэгтэй байдаг билээ. Эдгээр талбайнуудыг ингэж услахын тулд зургийг цикл бүр дор хаяж нэг даланг сэтлэх хэрэгтэй. Өөрөөр хэлбэл бүтэн үлдээсэн

далангууд нь циклгүй граф үүсгэж байхаар зарим далангуудыг сэтлэх хэрэгтэй юм. Тэгвэл чухал хэдэн даланг сэтлэх хэрэгтэй болох вэ? гэсэн асуудал гарна.



37 дугаар зураг

Энэ нь өгөгдсөн холбоост графаас дор хаяж хэдэн ирмэгийг зайлуулбал тэр гэнэт ч циклгүй граф болж хувирах вэ? гэсэн ерөнхий асуудалд хүргэнэ.

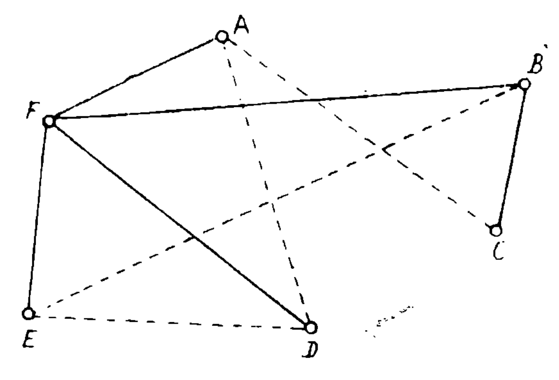
Графын ямар нэг циклд хамаардаг $\varepsilon = (A, B)$ ирмэгийг бид эхлээд зайлуулжээ гэж бодъё. A-гаас B-д ε-ээр очихын оронд харгалзах циклийн үлдсэн хэсгээр очиж болох тул энэ ирмэгийг зайлуулчихад граф нь холбоост хэвээр үлдэнэ. Хэрэв ε ирмэгийг зайлуулчихсаны дараа графад бас циклүүд үлдсэн байвал дээрх байдлаар өөр ирмэгийг зайлуулъя. Энэ процессийг үргэлжлүүлэн эцсийн эцэст бид циклгүй холбоост граф өөрөөр хэлбэл τ модонд хүрнэ.

Нийтээрээ хэдэн ирмэг зайлуулаа вэ? гэдгийг одоо бид хялбархан бодож гаргаж болно. τ мод нь анхны G графтай адил n ширхэг оройтой байна. 1§-ийн 1 дүгээр теорем ёсоор түүний ирмэгийн тоо нь $n-1$ байна. Иймээс учраас граф G анхандаа N ирмэгтэй байсан бол яг

$$\gamma = N - n + 1$$

ирмэгийг бид зайлуулах хэрэгтэй болно. Энэ тоог графын цикл эрэмбэ буюу цикломатик тоо гэж нэрлэдэг. Энэ тоо нь G графын оройн тооноос ирмэгийн тоог хассан ялгавар дээр 1-ийг нэмсэнтэй тэнцүү байна.

Иймд G графыг мод болгон хувиргахын тулд доор хаяж γ ширхэг ирмэгийг зайлуулах хэрэгтэй байна. G-гра-



38 дугаар зураг

фыг хэд хэдэн моднуудаас тогтсон ой болгон хувиргахад γ-аас илүү тооны ирмэгийг түүнээс зайлуулах хэрэгтэй байна. Учир нь (1§-ийн II теоремийн ёсоор) n-оройтой ойн ирмэгийн тоо нь n оройтой модны ирмэгийн тооноос цөөн байх ёстой билээ. Графыг ингэж мод болгон хувиргахыг 1 дүгээр зураг дээрх графын хувьд үзүүлье. Эхлээд EFD циклд хамаарсан ED ирмэгийг, дараа нь DFA циклд хамаарсан AD ирмэгийг эцэст нь AC,BE ирмэгүүдийг зайлуулъя. Тэгвэл 38 дугаар зураг дээрх мод үлдэнэ. Ингээд нийтдээ

$$\gamma = 9 - 6 + 4$$

ирмэгийг бид зайлууллаа.

Дасгал

1. Энэ зүйлд гаргасан үр дүнгүүдийг 2 ба 37 дугаар зураг дээрх графуудын хувьд шалга.

2. Бүрэн графын цикломатикийн тоо хэдтэй тэнцүү вэ?

3§. Хотуудыг холбох тухай бодлого

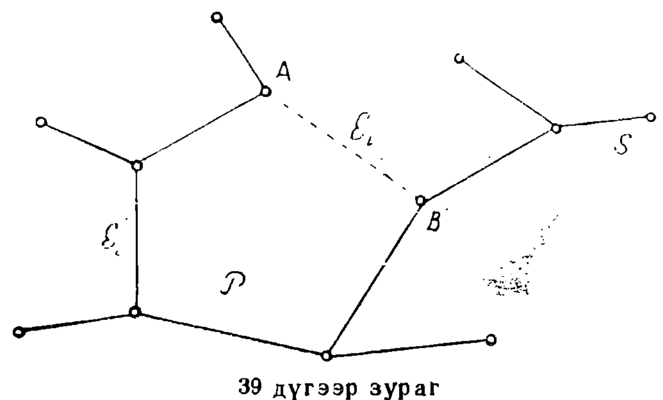
Холбоо харилцааны тухай практикийн чухал ач холбогдолтой бодлогыг замууд байгуулах бодлогын хэлбэрт шилжүүлэн авч үзье. A, B, C, ... гэсэн хотуудыг хооронд нь төмөр зам юмуу засмал замуудын сүлжээгээр холбох хэрэгтэй болжээ гэж бодъё. A,B хос хот бүрийн хувьд тэдгээрийг холбодог замыг байгуулахад орох өртөг $c(AB)$ мэдэгдэж байг. Замуудын бололцоот

сүлжээнүүдийн дотроос хамгийн хямд сүлжээг байгуулахад л бодлогын агуулга оршино. Төмөр замын сүлжээний тухай ярихын оронд цахилгааны шугам, усан зам, нефть дамжуулах хоолойнуудын тухай гэх мэтчлэн ярьж болох юм. Тухайлбал A, B, C гэсэн гуравхан хот байсан бол ABC, ACB, BAC шугамуудын нэгий нь л байгуулбал хүрэлцээтэй. Тэгэхдээ хэрэв BC нь хамгийн үнэтэй шугам бол BAC замыг байгуулж түүнийг зайлуулах хэрэгтэй юм.

Одоо ерөнхий тохиолдлыг авч үзье. Хамгийн хямд сүлжээ холболтын граф нь мод байх ёстой. Учир нь хэрэв тэр графад ямар нэг цикл байсан бол түүний ямар нэг ирмэгийг зайлуулахад хотууд нь мөн л замаар холбогдсон хэвээр үлдэнэ. Иймд n хотыг холбохын тулд $n-1$ зам байгуулах хэрэгтэй байна.

Хамгийн хямд үнэтэй байх замын сүлжээг байгуулахдаа хэмнэлттэй байх тухай дараахь хялбар дүрмийг баримталж болно гэдгийг харуулъя. Холбогдогч замын хэсэг ε_1 нь хамгийн хямд өртөгтэй байх тийм хоёр хотыг эхлээд холбоё. Дараагийн алхам бүрд урьд байгуулагдсан ирмэгүүдэд залгахад ямар нэг цикл үүсгэчихгүй ε_i замуудын хэсгийн хамгийн хямдыг нь авч залгая. Хэрэв ижил үнэтэй хэд хэдэн хэсэг зам байвал тэдний алий нь ч авч болно. Ийм маягаар байгуулсан τ мод бүрийг хэмнэлттэй мод гэж нэрлэе. Түүний үнэ нь үеүдийн үнүүдийн нийлбэртэй тэнцүү байна. Иймд

$$c(\tau) = c(\varepsilon_1) + c(\varepsilon_2) + \ldots + c(\varepsilon_{n-1}).$$



39 дүгээр зураг

Энэ оройнуудыг холбосон өөр ямар ч φ модны үнэ нь хэмнэлттэй τ модны үнэнээс хямд байж болохгүйг бид батлах хэрэгтэй. φ нь манай оройнуудыг холбосон хамгийн хямд мод ба τ нь хэмнэлттэй дугын мод байг. Хэмнэлттэй τ модны ε_1 ε_2, ... ирмэгүүд нь анх τ модыг байгуулахад ирмэгүүд ямар эрэмбэтэйгээр залгагдсан байна тийм эрэмбээр дугаарлагдсан юм гэж үзье. Хэрэв хамгийн хямд φ мод нь τ модтой давхцахгүй бол τ модны ядаж нэг ирмэг нь φ модонд хамаарахгүй.

$\varepsilon_i = (A,B)$ нь тийм эхний ирмэг, $P(A, B)$ гинж нь φ графын A ба B ирмэгүүдийг холбосон гинж болог. (39 дүгээр зураг). Хэрэв ε_i ирмэгийг φ-д нэмбэл $\varphi+\varepsilon_i$ граф нь $c = \varepsilon_i + \varphi(A,B)$ циклийг агуулах ба харин τ нь циклгүй учир c цикл τ-д хамаардаггүй ядаж нэг ирмэгийг агуулна. Энэ ε_i^1 ирмэгийг зайлуулбал φ-тай адил оройтой $\varphi' = \varphi + \varepsilon_i - \varepsilon_i^1$ мод гарна. Энэ модны үнэ нь:

$$c(\varphi') = c(\varphi) + c(\varepsilon_i) - c(\varepsilon_i^1)$$

байна. Нэгэнт φ нь хамгийн бага үнэтэй учир:

$$c(\varepsilon_i) \geqslant c(\varepsilon_i^1)$$

байна.

Нөгөө талаас ε_i нь замын ε_1, ε_2, ... , ε_{i-1} хэсгүүдэд залгахад цикл үүсгэдэггүй үеүд дотроос хамгийн бага үнэтэй нь билээ. Нэгэнт эдгээр ирмэгүүдэд ε_i^1 ирмэгийг нэмэхэд бас л цикл үүсгэхгүй учир байна. Иймд

$$c(\varepsilon_i) = c(\varepsilon_i^1)$$

учраас φ' нь мөн л хамгийн бага үнэтэй байна. Өөрөөр хэлбэл

$$c(\varphi) = c(\varphi')$$

байна.

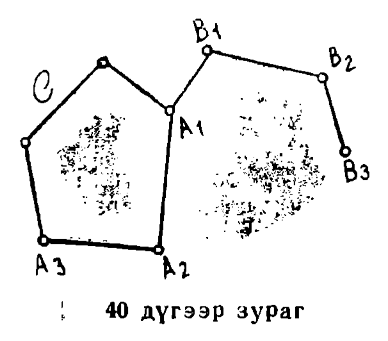
Ийнхүү бид хэмнэлттэй τ модтой нэг ерөнхий ирмэгтэй өөр нэг хамгийн бага үнэтэй φ' модыг оллоо. Хамгийн бага үнэтэй τ-тэй давхцах холбодог мод гартал нь энэ үйлдлийг давтан үргэлжлүүлж болно. Иймд τ нь үнэн хэрэгтээ бусад хэмнэлттэй модуудын нэгэн адил хамгийн бага үнэтэй байна.

Дасгал

1. Хавтгай дээр зургаан цэг ав. Ирмэгүүд нь энэ цэгүүдийг холбодог нийт урт нь хамгийн бага байх модыг ол.

4§. Гудамж ба талбай

Гудамж, талбайн нэрийг байн байн солих нь бүх дэлхийн хотуудын эрх баригчдаас цагийг их бага хэмжээгээр зугаатай өнгөрүүлэх арга ямагт болсоор ирсэн билээ. „Хотын эцгүүд“ хотынхоо гудамж талбайнуудын нэрийг цэгцтэй болгох зорилгоор гудамж бүхэн нь бүхэл хорооллын хэмжээгээр үргэлжилсэн бөгөөд тэр нь гудамжнуудын зэргэлдээх уулзварын нэрээр нэрлэгдсэн байхыг шаарджээ гэж бодъё. Жишээлбэл Вашингтоны гудамжны аль нэг төгсгөлд Вашингтоны талбай байх ёстой байжээ.



40 дүгээр зураг

Харгалзах асуудлыг бид дурын графын хувьд тавья. Холбоост граф өгсөн байг. Ямар тохиолдолд нэгэн утгатайгаар ирмэг нэг бүрд түүний нэг оройг харгалзуулж болох вэ?

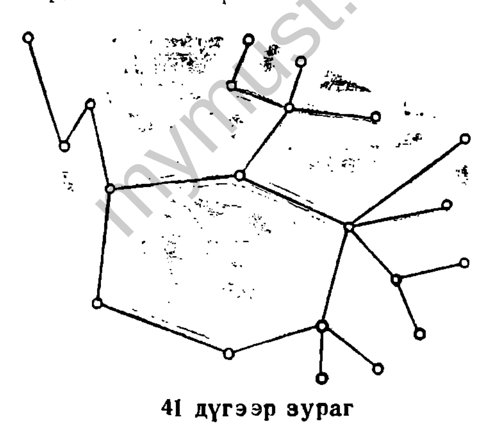
Хэрэв авч үзэж байгаа граф нь мод бол ямагт ингэж харгалзуулж болно гэдгийг юуны өмнө харуулъя. Дурын A_0 (34 дүгээр зураг), цэгийг модны үндэс болгон сонгон авсны дараа ирмэгт оройг A_0 B_1 ирмэгт B_1 оройг, A_0 C_1 ирмэгт A_1 оройг харгалзуулъя. Цаашилбал $A_1 A_2$ ирмэгт A_2 оройг харгалзуулах мэтчлэн үргэлжлүүлье. Иймд $A_{i-1} A_i$ ирмэг бүрд A_0 оройгоос аль болох хол орших A_i орой харгалзуулъя.

Одоо графад C цикл байжээ гэж бодъё (40 дүгээр зураг) C циклийн ирмэг бүрд энэ ирмэгийн аль нэг төгсгөлийн цэг харгалзана, өөрөөр хэлбэл, C циклийн аль нэг орой л харгалзана. Хэрэв жишээ нь A_1A_2 ирмэгт A_2 орой харгалзаж байвал A_2A_3 ирмэгт A_3 орой харгалзах мэтчлэн байна. C циклд хамаардаггүй ямар ч ирмэгт C-ийн орой харгалзаж чадахгүй. Ийм учраас C циклтэй ерөнхий A_1 оройтой A_1B_1 ирмэгт B_1 орой, B_1B_2 ирмэгт B_2 орой харгалзах ёстой гэх мэтчлэн байна. C циклийн орой бүр нь түүний ямар нэг ирмэгт харгалзсан учир тийм $A_1B_1B_2B_3$ ... гинж нь C-д эргэж ирж чадахгүй. Мөн ийм шалтгаанаар тийм гинж нь өөрийнхөө ямар нэг орой дээр буцаж ирж чадахгүй.

Иймд A_1B_1 ирмэгээр эхэлсэн замаар A_1 цэгээс хүрч болох графын хэсэг нь A_1 үндэстэй τ_1 мод байх нь харагдаж байна. C циклийн бусад A_i оройнуудын хувьд энэ дүгнэлт мөн хүчинтэй. τ_1 модны ирмэг бүрд A_1 цэгээс аль болох хол орших түүний төгсгөлийн цэгийг харгалзуулж болдгийг бид саяхан үзсэн билээ. C циклийн ирмэгүүдэд түүний A_i оройнууд харгалзах учир бид дараахь үр дүнд хүрнэ.

Холбоост графын ирмэг нэг бүрийг түүний төгсгөлийн зөвхөн ганц ганц цэгүүдэд харгалзуулж болдог байх гарцаагүй ба хүрэлцээтэй нөхцөл нь уул граф эсвэл мод эсвэл оройнууд дээрээс нь ургасан модууд бүхий ганц циклтэй байх явдал мөн (41 дүгээр зураг).

1 §-ийн теорем I ёсоор модны оройн тоо нь түүний ирмэгийн тооноос нэгээр илүү байдаг билээ. Хэрэв граф нь цикл юмуу оройнууд дээрээс нь моднууд ургасан ганц цикл бол түүний ирмэгийн тоо нь оройн тоотой тэнцүү байна. Иймд зөвхөн энэ нөхцөлүүдэд л ирмэг ба оройн хооронд шаардлагатай харгалзааг тогтоож болох байна.



41 дүгээр зураг

34 дүгээр зураг дээрх мод буюу 41 дүгээр зураг дээрх, графыг төвийн ганц хороолoлтой, хотын захаас төв рүү шууд орж ирсэн тийм гудамжтай бяцхан хотын зураг гэж төсөөлж болно. Ийм арга хэрэглэхэд хот нь хэтэрхий нүсэр том юм гэдгийг хотын зөвлөлийн гишүүд бахдалтайгаар ойлгоод дараахь дүрмийг батлахаар шийджээ. Гудамж талбайнуудад нэр өгөхдөө тал

бай бүрээс тэр талбайн нэртэй гудамж гарсан байхаар тохируулан нэрлэхээр шийджээ.

Графын онолын хэлэн дээр бол энэ нь графын орой бүрд түүнээс гарсан ирмэгийг нэг утгатайгаар харгалзуулах хэрэгтэй гэсэн үг юм. Ингэж харгалзуулж болдоггүй тохиолдлууд ч бий. Жишээлбэл 1§-ийн 1 дүгээр теоремээр модны оройн тоо нь түүний ирмэгийн тооноос 1-ээр илүү байдаг билээ. Гэвч энэ тохиолдолд ч манай нөхцөлийг бараг бүрэн хангаж болно. 34 дүгээр зураг дээрх модыг авч үзье. Энэ модны орой бүрд тэр оройгоос A_0 үндэс руу очих ирмэгийг харгалзуулж болно. Ингэвэл үндэснээс бусад орой бүрд түүнээс гарсан ирмэг харгалзана. Мод энэ чанараараа л онцлогтой юм. Ер нь дараахь теорем хүчинтэй.

Модноос ялгаатай холбоост граф бүхний орой бүрд түүнтэй зэргэлдээ ирмэгийг харгалзуулж болно.

Б а т а л г а а. n оройтой холбоост граф нь доор хаяж $n-1$ ирмэгтэй ба хэрэв энэ граф мод биш бол түүний ирмэгийн тоо нь $n-1$-ээс их байна. Нөгөө талаар зарим нэг ирмэгүүдийг зайлуулж граф бүхнийг мод болгон хувиргаж болдог билээ (2§-ийг үз) Графыг τ мод болгон хувиргахын тул зайлуулсан ирмэгийн нэг нь $\varepsilon_0 = (A_0, B_0)$ болог. A_0 цэгийг энэ модны үндэс болгон авья. Модны A_0-оос бусад орой бүрийг түүнтэй зэргэлдээ ирмэгт харгалзуулсны дараа ε_0 ирмэгийг A_0 оройд харгалзуулбал графын орой бүр нь түүнтэй зэргэлдээ ирмэгт харгалзана. Өмнөх сэтгэлгээнүүдийн алхмаас харахад нэг бол графын орой бүрийг түүнтэй зэргэлдээ ирмэгт, нэг бол графын ирмэг бүрийг түүнтэй зэргэлдээ оройд харгалзуулж болдог байна. Ямар тохиолдолд энэ хоёр харгалзаа нэг зэрэг оршин байх вэ? Хэрэв графын оройн тоо нь ирмэгийн тоотой тэнцүү байвал л эдгээр харгалзаа нэг зэрэг оршин байна. Тийм граф нь мод байж болохгүй ба харин тэр нь 41 дүгээр зураг дээр дүрслэгдсэн хэлбэртэй, өөрөөр хэлбэл нэг C циклтэй[1] граф байх ёстой. Энэ тохиолдолд ирмэгийг оройд оройг ирмэгт харгалзуулсан дээрх хоёр хэлбэрийн харгалзаа хоёулаа байна. C циклийн ирмэгүүд нь мөн

[1]Учир нь түүний цикломатикийн тоо 1-цүү. тэнтэй

циклийн оройнуудад, C циклд хамаардаггүй орой бүрд түүнтэй зэргэлдээ бөгөөд C-д ойр байх ирмэг харгалзана.

Дасгал

1. 1 ба 2 дугаар зураг дээрх графууд дээр оройнуудыг тэдэнтэй зэргэлдээ ирмэгүүдэд харгалзуулсан харгалзаануудыг тогтоо.

IV БҮЛЭГ

ХАРГАЛЗАА ТОГТООХ НЬ

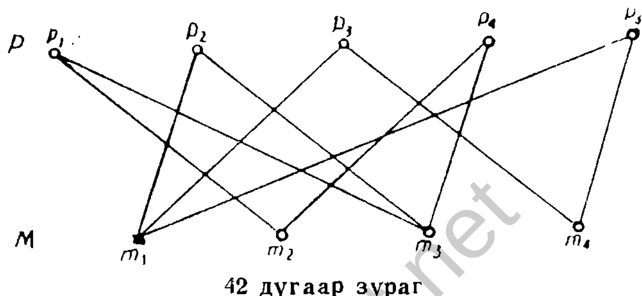
1§. Ажилд оруулах тухай бодлого

Хэд хэдэн мэргэжлийн сул орон тоо байсан бөгөөд энэ мэргэжлүүдээр ажиллахыг хүссэн хэд хэдэн хүн байжээ гэж бодъё. Тэгэхдээ хүн бүр дээрх мэргэжлүүдээс хэд хэдийг эзэмшсэн боловч тэдний дотор бүх дурдсан мэргэжлийг бүгдийг нь эзэмшсэн хүнгүй байсан гэж үзье. Тэгвэл хүн бүр өөрийнхөө эзэмшсэн мэргэжлийн аль нэгээр ажиллаж болохоор эдгээр хүмүүсийг дээрх орон тоонууд дээр авч ажиллуулж болох уу? гэсэн асуудал гарна.

Бид энэ бодлогыг нилээд өвөрмөц хэлбэрийн ямар нэг графыг ашиглан дахин тайлбарлая. Дээр дурдсан хүмүүсийн олонлогийг M, мэргэжлийн орон тоонуудаас тогтсон олонлогийг P гэж тэмдэглэе. M олонлогийн m хүн бүрийг түүний орж ажиллаж болох P-ийн p орон тоо бүртэй (m, p) ирмэгээр холбож граф байгуулъя. Энэ граф M-ийн аль ч хоёр оройг хооронд нь холбосон ирмэггүй ба мөн P-ийн аль ч хоёр оройг холбосон ирмэггүй учир энэ граф нь 42 дугаар зурагт дүрсэлсэн хэлбэртэй байна. Бүх оройнууд нь M ба P гэсэн хоёр олонлогт хуваагддаг бөгөөд аль ч олонлогийн хоёр орой хоорондоо ирмэгээр холбогдоогүй тийм графыг ***хоёр хуваарьт (талт) граф*** гэж нэрлэдэг.

Орж ажиллах орон тоонуудын тоо нь хүссэн хүмүүсийн тооноос цөөн байвал хүн бүрийг тохирох ажилд нь авч ажиллуулах талаар ярьж болохгүй нь мэдээж. Иймд орон тооны тоо нь хүмүүсийн тооноос цөөнгүй байх ёстой байна. Гэвч энэ нөхцөл ч хүрэлцээтэй нөхцөл биш

юм. Жишээлбэл ажилд орохыг хүссэн гуравны хоёр нь мужаан, гурав дахь нь ус түгээгчийн ба мужааны ажлыг хийж чаддаг байг. Эдгээр хүмүүсийг ажилд авч ажиллуулах нэг мужааны, гурван ус түгээгчийн бүгд дөрвөн орон тоо байсан гэе. Хэдийгээр энэ тохиолдолд орон тооны тоо нь энэ орон тоон дээр ажиллахыг хүссэн хүмүүсийн тооноос илүү, эдгээр хүмүүсийн дотор шаардагдсан хоёр мэргэжлийн хүмүүс байгаа боловч мужаануудын нэгд нь тохирох ажил олдохгүй болно.



42 дугаар зураг

Ажилд орохыг хүссэн нийт хүмүүсийн тоо N-тэй тэнцүү байжээ гэж бодьё. Ажилд оноох тухай бодлого шийдтэй байхын тулд дараахь нөхцөл биелж байх ёстой нь илэрхий.

Ямар ч $k(k=1,2,\ldots N)$ хүнээс тогтсон бүлгийг авахад тус бүр дээр нь энэ k хүний ядаж нэг нь ажиллаж болох тийм орон тоо k-аас цөөнгүй (өөрөөр хэлбэл k хүнээс тогтсон манай бүлэг тус бүрийг нь хийж чадах тийм k ажил) олддог байх ёстой.

Жишээлбэл хүмүүсийн нэг нь мужаан, нөгөө нь мужааны ба ус түгээгчийн мэргэжлийг нэг зэрэг эзэмшсэн ба ус түгээгүүрийн ажилтан хоёр хэрэгтэй байсан бол $k=2$ үед манай нөхцөл биелэх боловч $k=1$ үед биелэхгүй учир дурдсан хүмүүсийг нэг зэрэг ажлаар хангаж чадахгүй.

Дээр дурдсан нөхцөлийг ***элдэв байхын нөхцөл*** гэж нэрлэдэг. Манай үндсэн зорилго энэ нөхцөл *хүрэлцээтэй нөхцөл* гэдгийг харуулахад оршино.

Теорем 1. *Хэрэв элдэв байх нөхцөл биелбэл хүн бүрд тохирох ажлыг оноож болно.*

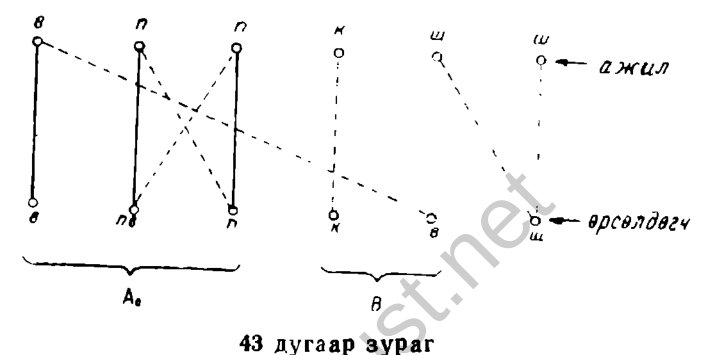
Энэ теоремийг батлах нь тийм ч хялбар биш. Энэ теорем нь $N=1$ үед үнэн байх нь илт. Хэрэв нэг хүн байгаад эдгээр ажлууд дотроос ядаж нэгийг нь хийж чадахаар байвал тэр ажлыг түүнд онооҗ болно. $N=2$ үед элдэв байх нөхцөл биелж байвал ажлуудын алий нь ч авахад тэр нь хоёр хүний ядаж нэгд нь тохирдог байх ажлууд дор хаяж хоёр олдоно. Энэ тохиолдолд хүн нэг бүр эдгээр ажлуудын ядаж нэгийг нь хийж чаддаг учир мужаан, ус түгээлийн ажилтнуудын тухай өмнөх жишээний бэрхшээл энд тохиолдохгүй. Иймд энэ тохиолдолд хоёр хүнд хоёуланд нь ажил онооҗ чадна. Ингэхлээр $N=1$, $N=2$ үед теорем нь үнэн байна. Энэ теоремийг ерөнхий тохиолдолд математикийн индукцийн аргаар батлахыг бид зорьё. Хүмүүсийн тоо $N-1$-ээс хэтрэхгүй үед бид теоремийг үнэн гэж үзээд N хүний хувьд үнэн байна гэдгийг баталъя.

Элдэв нөхцөл биелэгдэхдээ нэг бол нөөцтэй, нэг бол илүү ч үгүй, дутуу ч үгүй биелж болно. Тодорхой дурдвал k-хүнээс ($k=1,2, \ldots , N-1$) тогтсон бүлэг нэг бүр нь нийтдээ k-аас илүү тооны ажил гүйцэтгэж чаддаг (нөхцөл нөөцтэй биелсэн) эсвэл ямар нэг k_0 -ийн хувьд ($k_0 =1,2, \ldots , N-1$) нийтдээ яг k_0 ажлыг гүйцэтгэж чаддаг k_0 хүнтэй бүлэг байдаг (нөхцөл илүү ч үгүй, дутуу ч үгүй биелсэн) байж болно. Энэ тохиолдлуудын алинд ч N хүний хүн нэг бүрд тохирох ажлыг онооҗ болно гэдгийг үзүүл.

Хэрэв элдэв байх нөхцөл нөөцтэй биелж байвал N хүний хэн нэгийг нь сонгон авч түүнд хийж чадах ажлуудаас нь нэгийг нь онооё. Үлдсэн $N-1$ хүний аль ч k хүмүүс (дурын k-ийн хувьд) анх байсан ажлуудаас доор хаяж $k+1$ ажлыг нийтдээ хийж чаддаг ба саяын ажил оноолт нь эдгээр хүмүүсийн хийж чадах ажлуудыг сайндаа л нэгээр цөөрүүлэх учир энэ k хүмүүс нийтдээ k-аас цөөнгүй ажлыг хийж чадна. Одоо индукцийн алхам ёсоор $N-1$ хүн байхад нэг бүрд тохирох ажлыг нь онооҗ болох юм. Хэрэв элдэв байх нөхцөл илүү дутуугүй биелж байвал нийтдээ яг k_0 ($k_0 < N$) ажлыг хийж чаддаг k_0 хүнээс тогтсон ямар нэг A_0 бүлгийг авч үзье. Элдэв байх нөхцөл ёсоор эдгээр хүмүүсийн аль ч k хүмүүс нь ($k=1,2, \ldots , k_0$) үед (нийтдээ k ажлыг хийж чадна. Индукцэд үзэж буй ёсоор k_0 хүнтэй A_0 олонлогийн хүн нэг бүрд тохирох ажлы нь онооҗ болно. Одоо $N-k_0$ хүндтэй үлдсэн бүлгийг авч үзье. Үлдсэн

4*

н жлуудыг авч үзвэл энэ бүлгийн хувьд элдэв байхын нөхцөл хангагдана гэдгийг бид үзүүлэх ёстой.
Өөрөөр хэлбэл эдгээрийн аль ч $k(k=1,2, \ldots, N-k_0$ үед) хүнээс тогтсон B бүлгийг авахад тус бүрд нь энэ бүлгийн хүмүүс орж ажиллаж болох k-аас цөөнгүй, чөлөөтэй орон тоо олдоно гэдгийг харуулах ёстой. Үүнийг харуулахын тулд B-ийн ямар нэг бүлгийн хүмүүс хамтдаа зөвхөн $k'(k'<k)$ ажлыг гүйцэтгэж чаддаг гэж үзье. Тэгвэл A_0 ба B бүлгүүдэд ордог k_0+k хүмүү-



43 дугаар зураг

с ээс тогтсон A_0+B бүлгийн хүмүүс анхнаасаа k_0+k ажилд тэнцэх ёстой байсан болж элдэв байхын нөхцөл биелэгдэж байгаатай зөрчилдөнө. Ийм учраас үлдсэн $N-k_0$ хүмүүсээс тогтсон бүлгийн хувьд элдэв байх нөхцөл биелэгдэх ба индукцийн алхам ёсоор эдгээр хүмүүст тохирох ажлыг оноож болно. Үүгээр теорем бүрэн батлагдав.

43 дугаар зураг дээр $N=6$ тохиолдлын графыг дүрсэлжээ. Доод шугамын дээр байгаа эхний гурван орой нь ус түгээлийн ажилчин (*в*), мужаан бөгөөд ус түгээлийн ажилчин (*пв*), мужаан (*п*) гурван хүнээс бүрдсэн A_0 бүлгийг дүрслэх ба ирмэгүүд нь харгалзах мэргэжил (дээд шугаман дээрх орой руу) очно. Үлдсэн ($N-k_0=3$) гурван орой нь харгалзан өрлөгчин (*к*), ус түгээлийн ажилчин (*в*) ба шаварчингаар (*ш*) ажиллахад бэлэн байгаа гурван хүнийг дүрсэлжээ. Үлдсэн орон тоон дотор ус түгээлийн ажилчны орон тоо байхгүй. Харин өрлөгчний орон тоо байгаа учир өрлөгчин ба ус түгээлийн ажилчнаас тогтсон B бүлгийн хувьд элдэв байхын

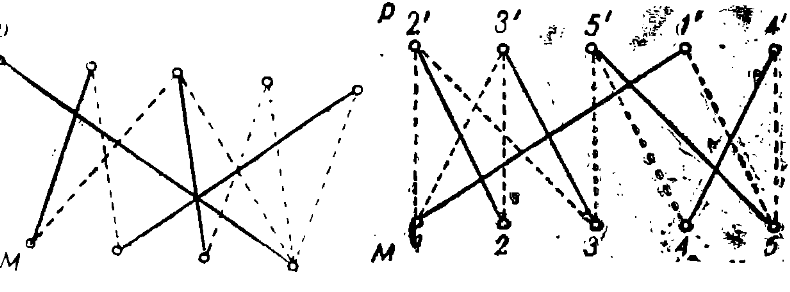
нөхцөл биелэхгүй гэдгийг тэмдэглэе. Тохирох орон тоо дөрөвхөн байгаа учир таван хүнээс тогтсон $A_0 + B$ бүлгийн хувьд ч элдэв байхын нөхцөл биелэхгүй нь бас л илт.

2 §. Өөр томьёоллууд

42 дугаар зураг дээрх хоёр хуваарьт графын оройнуудын, нэг олонлог *M*-ийг ажилд орох хүсэлтэй хүмүүсийн олонлог, оройнуудын нөгөө олонлог *P*-г орж ажиллаж болох орон тоонуудын олонлог гэж үзсэн билээ. Одоо хүн бүхэнд тохирох ажлы нь оноон өгч болдог байжээ гэж үзье. Графын хэлээр энэ нь *M*-ийн орой бүрээс тодорхой ирмэг гарах бөгөөд эдгээр ирмэгүүдийн аль ч хоёр нь *P*-ийн нэг орой дээр очихгүй гэсэн үг юм. Энэ тохиолдолд *M* олонлогийг *P* олонлогт буулгасан буулгалт байна гэж ярьдаг. *M*-ийг *P*-д буулгасан ийм буулгалт оршин байх гарцаагүй бөгөөд хүрэлцээтэй нөхцөл нь элдэв байхын нөхцөл биелж байх, өөрөөр хэлбэл *M*-ийн ямар ч k оройнууд нь доор хаяж *P*-ийн k ялгаатай оройнуудтай ирмэгээр холбогдсон байх явдал мөн гэдгийг бид дээр үзсэн билээ. Хэрэв *P* ба *M* нь нэгэн ижил тооны оройнуудтай бол ийм буулгалт нь *M* ба *P* олонлогийн хоорондын харилцан нэг утгатай буулгалт болох ба бие биедээ харгалзах оройнууд нь графын ирмэгээр холбогдоно. (45 дугаар зураг.)

Графын оройнуудын хооронд ямар нэг харгалзаа тогтоох тухай энэ бодлогыг бас олон янзаар томьёолж болно.

Жишээлбэл k хөвгүүд, k охид байж гэе. Эдгээрийн зарим нь бие биетэйгээ танил байж гэж үзье. Эдгээр залуучуудыг хос хосоор нь бүжиглүүлэхээр хуваахдаа хөвгүүн бүр өөрийн таньдаг охидыг сонгон бүжиглэсэн бай-



44 дүгээр зураг

45 дугаар зураг

хаар ямар нөхцөлд хуваах болох вэ? гэсэн асуулт тавьж болно.

Энэ бодлогыг бас дараахь байдлаар өөрчлөн томьёолж болно. Жижиг тосгоны насанд хүрсэн охид хөвгүүдийн тоо ижил байжээ. Нутгийн заншлаар ойр төрлийн хүмүүс жишээлэхэд эцэг юмуу эх нэгтэй хүмүүс, ах дүүсийн хүүхдүүд хоорондоо гэр бүл болж болдоггүй байв. Ямар нөхцөлд хөвгүүн бүрд энэ тосгоноос эхнэр олдох вэ? Хүн нэг бүрийн гэр бүл болох бололцоог хоёр хуваарьт ямар графаар урьдын адил дүрсэлж болно. Энэ тохиолдолд хоорондоо төрөл биш хүмүүст харгалзсан оройнууд л хоорондоо ирмэгээр холбогдоно. Энэ бодлогын бас нэг өөр хувилбарыг томьёолъё. Танай сургууль дээр хэд хэдэн бүлгэм байдаг гэж бодъё. Бид эдгээр бүлгэмүүдийг:

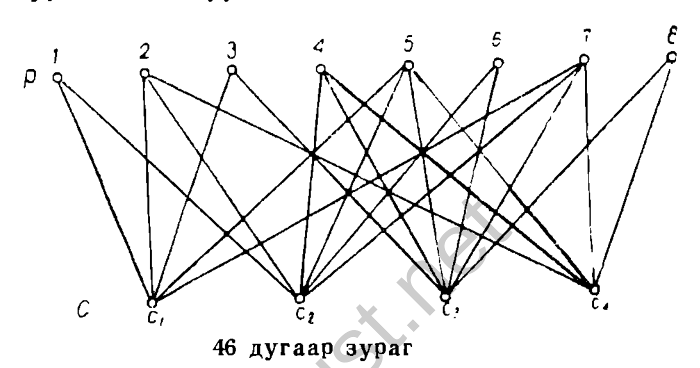
$$C : C_1, \ C_2, \ldots, C_N$$

гэж нэрлэе. Бүлгэм бүр даргатай байх ёстой нь мэдээж хэрэг. Сурагчдын ажлыг хөнгөвчлөхийн тулд нэг сурагч нэгээс илүү бүлгэмийн даргын ажлыг хийж болохгүй гэсэн шаардлага байв. Тэгвэл ямар нөхцөлд энэ боломжтой вэ? гэсэн асуудал гарна. Тэр болгон боломжтой байхгүй нь мэдээж. Жишээлбэл цөөн сурагчтай бүлгэмийн тоо нь хэт олон байвал дээрх шаардлага хангагдахгүй. Энэ бодлогыг бодохдоо бид бас л хоёр хуваарьт графыг ашиглая. Энэ тохиолдолд оройнуудын нэг олонлог нь N бүлгэмүүд болох ба нөгөө P олонлог нь сургуулийн бүх сурагчдын олонлог болно. Хэрэв P сурагч C_i бүлгэмийн гишүүн байвал л бид C_i бүлгэмээс p сурагч руу ирмэг татна. k ширхэг бүлгэм бүр ($k=1, 2, \ldots, N$) үед доор хаяж k сурагчтай байна гэж элдэв байхын нөхцөл энд томьёологдоно. Дээр баталсан теоремээр энэ нь бүлгэм нэгбүр өөрөөр даргатай байхын нөхцөл мөн билээ.

Бид бодлогыг ийм маягаар дэвшүүлэн, Английн математикч Филип Хооллын 1935 онд хэвлүүлсэн теоремд энэ бодлогыг шилжүүлжээ. Тус бүр нь элемент p үүдээс тогтсон ямар нэг N тооны C_i олонлогууд өгчээ; бүх p-үүдийн олонлогийг P гэж тэмдэглэе. Ялгаатай олонлогуудад P олонлогийн ялгаатай элементүүд харгалзсан байхаар C_i олонлог нэг бүрд түүний нэг P_i элементийг харгалзуулахыг хичээе. Дурын k ($k=1, 2, \ldots, N$) ширхэг C_i олонлогуудыг авахад тэдгээр нь

нийтдээ P-ийн ядаж k ширхэг ялгаатай элементийг агуулсан байвал л сая ингэж харгалзуулж болно.

Сургуулийн бүлгэмүүдтэй холбогдуулан томьёолсон бодлогын томьёоллоо дахин авч үзье. Хэрэв бүлгэмийн тоо хэт олон байвал элдэв байхын нөхцөлийг шалгах нь тийм ч хялбар бишээ. Ийм учраас бүлгэм бүр тус тусдаа даргатай байх боломжийг бүрэн хангахаар бүлгэмүүдийг эмхлэн байгуулах ямар нэг хялбар дүрэм байж болох уу? гэсэн асуудлыг тавьж болно.



46 дугаар зураг

Ингэж эмхлэн байгуулж болдог. Үүнийг үзүүлэхийн тулд бүлгэм бүр доор хаяж таван сурагчтай байна гэж үзье. Тэгвэл харгалзах графын C олонлогийн орой нэг бүрээс доор хаяж таван ирмэг гарна. k бүлгэмээс тогтсон бүлгийн хувьд $5k$-аас цөөнгүй ирмэг C олонлогийн харгалзах оройнуудаас p олонлогийн оройнуудад очно ($k=4$ үеийг 46 дугаар зураг дээр дүрсэлжээ). Сурагч бүр таваас илүү бүлгэмд явж болохгүй гэж хэрэв бид шаардвал k бүлгэмээс доор хаяж k ирмэг P-ийн оройнуудад очих болж элдэв байхын нөхцөл биелнэ.

Энэ сэтгэлгээ нь ерөнхий тохиолд ч үнэн юм. Иймд дараахь үр дүнг томьёолж болно.

Бүлгэм бүр дор хаяж t сурагчтай, ямар ч сурагч t-ээс илүү бүлгэмд явдаггүй байвал бүлгэмүүд тус тусдаа даргатай байж болно.

Дасгал.

1. Тус тусад нь дарга сонгож болдоггүй тийм бүлгэмүүдийн олонлогийн жишээг үзүүл.

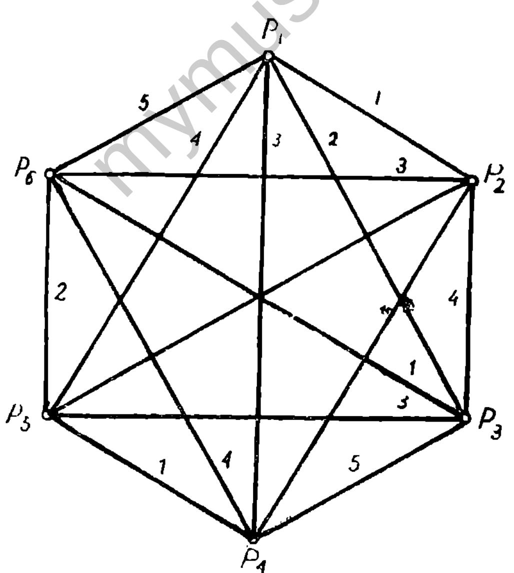
2. Гурван хүнтэй бүлгэмүүдийг 12 сурагчаас хэдэн янзаар эмхэлж болох вэ?

Энэ бүлгэмүүд тус тусдаа даргатай байж болох уу?

3. 42 дугаар зураг дээрх граф дээр М олонлогийг Р-д буулгасан буулгалтыг заа.

3 §. Тойрог харгалзаа

Оролцогчдыг хос хосоор нь яаж оноох вэ? гэсэн асуудал тэмцээн бүр дээр тохиолдоно. Заримдаа үүнийг шийдэхэд хялбар байдаг. Жишээлбэл хэрэв тойрог бүрийн дараа хожигдсон нь тэмцээнээс хасагддаг бол үлдсэн оролцогчид шинэ хосуудыг бүрэлдүүлнэ. Тэгэхдээ (хэрвээ оролцогчдын тоо сондгой бол) тэдний нэг нь хийлж болно. Шатрын тэмцээн шиг «тойрог тэмцээн»-ний хувьд энэ бодлого нь нилээд төвөгтэй байдаг. Энд оролцогч бүр нь үлдсэн оролцогч нэг бүртэй тоглох ёстой тул тэмцээний хүснэгтийг урьдчилан бэлтгэх хэрэгтэй. Энэ байдлыг графаар дүрслэхэд тохиромжтой. N тоглогч байвал тус бүр нь $N-1$ тоглогч нэг бүртэй тоглоно. Тоглолт бүрийг урьдын адилаар, хоёр тоглогчийг төлөөлсөн графын A ба B оройг холбосон (A, B) ирмэгээр дүрсэлье. Тэгвэл тоглолтын бүх олон



47 дугаар зураг.

юг нь N оройтой бүрэн графаар дүрслэгдэнэ. $N=6$ үеийн тийм графыг 47 дугаар зураг дээр дүрсэлжээ. Тойрог бүрд тоглогчдыг ямар нэг аргаар хосуудад нэгтгэх хэрэгтэй. Тоглогчдыг хос хосоор нэгтгэх нь N оройн тус бүрээс нэг нэгийг авсан, хоорондоо зэрэгцээ биш $\frac{1}{2}N$ ирмэгийг граф дээр сонгон авах сонголтод харгалзана. Дараагийн $\frac{1}{2}N$ шинэ ирмэгүүдийг сонгон авах мэтчлэн уул тэмцээнийг дуустал нь үргэлжлүүлнэ.

1	2	3	4	5	6	•	•	•	•	N
2	1	N	N − 1	N − 2	N − 3	•	•	•	4	3
3	4	1	2	N	N − 1	•	•	•	6	5
4	6	5	1	3	2	N	•	•	8	7
•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•
•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•
•	•	•	•	•	•		•	•	•	•
½N + 1	N	N − 1	N − 2	•	•	•	•	•	3	2
½N + 2	3	2	N	N −	•	•	•	•	5	4
•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•
•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•
•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•
N	N − 1	N − 2	•	•	•	•	•	•	2	1

48 дугаар зураг

47 дугаар зураг дээр 1-ийн тоотой ирмэгүүд нь нэг дүгээр тоглолтод тойрогт[1] хоорондоо уулзаж буй хосуудад, 2-ын тоотой ирмэгүүд нь 2 дугаар тойрогт тоглолтод уулзан буй хосуудад харгалзах мэтчлэн байна.

[1] Шатрын тохнолдолд энэ үгийг тавил гэвэл тохиромжтой.

Хэрэв ямар нэг хялбар аргыг зааж өгөөгүй бол олон тоглогчтой тэмцээний бүх тойргуудын онооолтын ийм хүснэгтийг шууд хийх нь их төвөгтэй байдаг. Тоглогчдын ($N=6$, 8, 10, 12 гэх мэт) тооноос хамаарах онооолтын ийм хүснэгтүүдийг тэмцээний олон тооны лавлах бичгүүдэд хийж оруулсан байдаг. Хүснэгтийг зохиохдоо тоглогчдын тоо N-ийг тэгш гэж үзэх нь хангалттай. Хэрэв энэ тоо нь үнэндээ сондгой бол энэ тойрогт F-тэй тоглох ёстой хүн нь хийлдэг гэж болзон хуурамч тоглогч F-ийг нэмж болно.

Тоглогчдын тоо N нь тэгш байх үеийн онооолтын хүснэгтийг зохиох хялбар бөгөөд ерөнхий нэг аргыг тайлбарлая. Тоглогчдыг 1, 2, . . . , N тоогоор тэмдэглэн эдгээр тоонуудыг квадрат хүснэгтийн эхний мөрөнд бичье. Нэгдүгээр тоглолтод эхний тойрогт эдгээрийн эсрэг тоглох тоглогчдын дугаарыг хоёр дугаар мөрөнд бичье. Үүний адилаар 1, 2, . . . , N тоглогчдын эсрэг хоёрдугаар тойрогт тоглох тоглогчдын дугаарыг гуравдугаар мөрөнд бичих мэтчлэн бүх тоглогчид бие биеийн эсрэг тоглосон байх хүртэл нь үргэлжлүүлнэ. Манай хүснэгтэд тоглогчдын хос нэг бүр яг нэг удаа орсон байх ёстой нь илт. Үүнийг хийх аргыг 48 дугаар зураг дээрх хүснэгтэд үзүүлжээ. j дугаар тоглогчтой k дугаар тойрогт тоглох хүнийг олохын тулд энэ хүснэгтийн j дугаар багана $(k+1)$ дугаар мөрийн огтлолцол дээр байгаа дугаарыг олбол хангалттай.

Энэ хүснэгт нь дараахь маягаар байгуулагджээ. Хүснэгтийн эхний мөрөнд 1-ээс N хүртэлх тоонуудыг дээр хэлсэн байдлаар байгуулж мөн энэ тоонуудыг нэгдүгээр баганынд бичнэ. Одоо мөр бүрийн үлдсэн $N-1$ байранд 2-оос N хүртэлх тоонуудыг буурах байдлаар цикл эрэмбээр байрлуулъя. Эхний $\frac{1}{2}N$ мөр нь 2, 4, . . . , N тэгш тоонуудаар эхлэх ба дараахь байдалтай байна.

$$
\begin{array}{cccccccc}
2 & N & N-1 & \cdot & \cdot & \cdot\,\cdot\,\cdot & 4 & 3 \\
4 & 3 & 2 & N & N-1 & \cdot\,\cdot\,\cdot & 6 & 5 \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot\,\cdot\,\cdot & \cdot & \cdot \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot\,\cdot\,\cdot & \cdot & \cdot \\
N & N-1 & N-2 & \cdot & \cdot & \cdot\,\cdot\,\cdot & 3 & 2
\end{array}
$$

Үлдсэн мөрүүд нь 3, 5, . . . , $N-1$ сондгой тоонуудаар эхлэх ба

3	2	N	$N-1$	·	·	·	·	·	5	4
5	4	3	2	N	$N-1$	·	·	·	7	6
·			·	·	·	·	·	·	·	·
·			·	·	·	·	·	·	·	·
$N-1$	$N-2$		·	·	·	·	·	·	2	N

хэлбэртэй байна. Энэ хүснэгтэд 1-ийн тоо байхгүй байгаа ба нөгөө талаас хэн ч өөрөө өөрийнхөө эсрэг тоглож болохгүй учир баганын дээд талд бичигдсэн тоо энэ багананд хэзээ ч давтагдахгүй гэдгийг тэмдэглэе. Хэрэв гол диагоналийн дагуу байгаа бүх тоонуудыг 48 дугаар зураг дээр үзүүлсэн шигээр бүгдийг нэгээр соливол энэ хоёр дутагдлыг арилгаж болно. Тэгвэл тоглогч бүр өөрийн дугаараа, түүнтэй янз бүрийн тойрогт тоглох тоглогчдын дугаарыг олж чадна. Жишээлбэл 4 дүгээр тоглогч нь 1 дүгээр тойрогт $N-1$ дүгээр тоглогчтой, 2 дугаар тойрогт 2 дугаар тоглогчтой, гуравдугаар тойрогт 1 дүгээр тоглогчтой, дөрөвдүгээр тойрогт 6 дугаар тоглогчтой гэх мэтчлэн $N-1$ дүгээр тойрогт $N-3$ дугаар тоглогчтой тоглоно.

Дасгал

1. $N=6$, 8, 10 үеийн тэмцээний оноолтуудын хүснэгтүүдийг байгуул.

2. Дээр тайлбарласан хүснэгтүүд нь үнэндээ тэмцээний график мөн гэдгийг батал. Үүний тулд:

а) Тоглогч бүр бусад бүх тоглогчтой тус бүр нэг нэг удаа тоглоно.

б) Тоглогч бүр янз бүрийн тойрогт өөр өөр хүнтэй тоглоно.

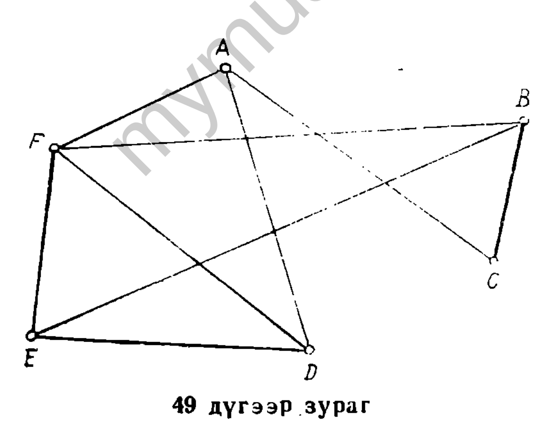
в) Хэрэв ямар нэг тойрогт j дүгээр тоглогч нь k дугаар тоглогчтой учирсан бол k дугаар тоглогчийн энэ тойрогт тоглох хүн нь j гэж заагдсан байна гэдгийг шалга.

V БҮЛЭГ

ЧИГЛЭЛТ ГРАФУУД

1 §. Дахиад л спорт тэмцээнүүд

Нэгдүгээр бүлэгт графын тухай анх авч үзэхдээ спортын багуудын тэмцээнийг жишээ болгон авч үзсэн. Жишээлэхэд *A* ба *C* багууд хоорондоо тоглочихсон л байвал эдгээрийг *AC* ирмэгээр холбодог байсан билээ. (6 дугаар хуудасны 1 дүгээр зураг) Гэвч ийм граф нь энэ хоёр багийн аль нь хожсон бэ? гэсэн асуултанд хариу өгч чадахгүй.

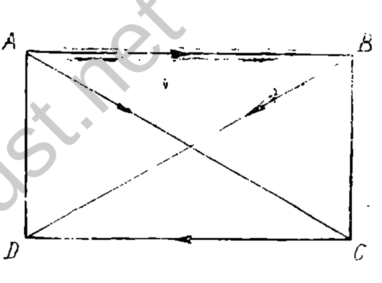


49 дүгээр зураг

Энэ дутагдлыг хялбархан арилгаж болно. Хэрэв *A* баг нь *C*-г хожсон бол *AC* ирмэг дээр *A*-гаас *C* рүү чиглэсэн сумыг тавьж байхаар болзъё. Бүх тоглолтуудын дүнг бид мэдэж байсан гэж бодъёо. Тэгээд 1 дүгээр зураг дээрх граф дээр харгалзах сумуудыг тавихад 49 дүгээр

зураг дээрх граф гарчээ гэж үзье. Энэ графаас үзвэл A нь C-г хожсон, F баг нь D-д хожигдсон, харин B нь тоглолт бүрдээ хожсон, буюу C, E, F-ийг хожсон байна. Ирмэг бүрд нь чиглэл заагдсан G графыг ***чиглэлт граф*** гэж нэрлэдэг. Тийм графууд нь багуудын хоорондын буюу тусгай тоглогчдын хоорондын тэмцээний дүнгийн тухай мэдээллийг агуулж байж болохыг бид саяүзлээ. Үүний урвууд чиглэлт граф нэг бүрийг ямар нэг тэмцээний дүнгийн геометр дүрслэл гэж үзэж болно.

Ямар нэг тоглолт нь тэнцээ болсон бол яах вэ? гэсэн асуудлыг бид хөндөлгүй чимээгүй өнгөрөв. Тэнцэх нь ямар ч тэмцээний оноог тоолж гаргахад саадтай байдаг. Ихэнхдээ, жишээлбэл, одон-бөмбөгийн юмуу сквош[1] мэтийн тэмцээнд ерөөсөө тэнцээ байж болохгүйгээр тоглолтын дүрмийг боловсруулдаг. Зарим тоглолтуудын хувд жишээлбэл гольф юмуу хөл бөмбөгийн тэмцээнд, тэнцээг зайлуулахын тулд нэмэлт тойрог явуулдаг. Хэрэв тэнцээ зайлшгүй гарвал харгалзах ирмэгүүдийг чиглэлгүй үлдээж тэднийг граф дээр тусгаж болно. Тэгвэл зарим ирмэгүүд нь чиглэлтэй, зарим нь чиглэлгүй граф гарна. Ийм графыг ***холимог граф*** гэж нэрлэдэг. Холимог граф нь бас бус олон асуудлуудад тохиолддогийг бид хожим үзнэ.



50 дугаар зураг

50 дугаар зураг дээрх граф нь холимог граф юм. Энэ нь A, B, C, D гэсэн дөрвөн багийн тоглолтуудын дүнг харуулах бөгөөд энд A нь B ба C-г хожиж D-тэй тэнцсэн, B нь A-д хожигдож, C-тэй тэнцэж D-г хожсон, C нь A-д хожигдож D-г хожиж B-тэй тэнцсэн, D нь A-тай тэнцэж B ба C-д хожигдсон байна.

2 §. Нэг чиглэлийн хөдөлгөөнүүд

Ямар нэг замуудын юмуу гудамжнуудын сүлжээний зураг нь өвөрмөц боловч графыг тодорхой жишээ болж чадна. Хотын дэвсгэрийн орчин үеийн зургууд дээр гу-

[1]) Сквош-теннистэй төсөөтэй бөмбөгөөр тоглох тоглоом

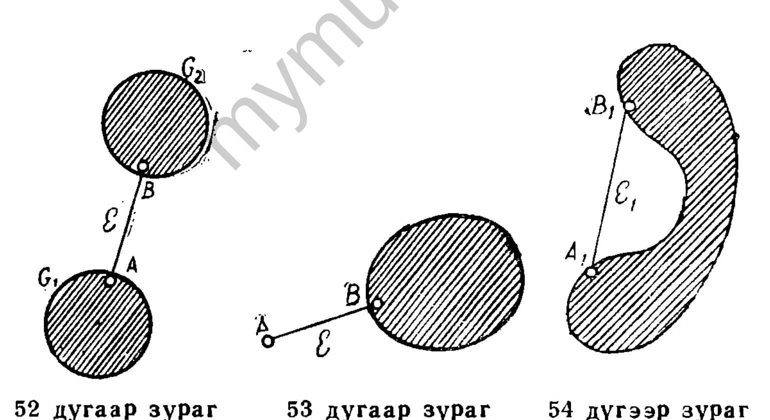
дамжнуудын харилцан байрлал, тэдний уулзвар, мөн аль гудамжнуудад хөсгийн хоёр чиглэлийн, алинд нэг чиглэлийн хөдөлгөөн зөвшөөрөгдсөн зэргийг үзүүлсэн байх ёстойн гадна тэдгээр хөдөлгөөний чиглэлүүдийг зааж үзүүлсэн байх ёстой. Тэгвэл энэ нь чиглэлтэй юмуу хэрэв хотын зарим гудамжнуудад нэг чиглэлийн хөдөлгөөн тогтоогдоогүй байвал холимог граф болно (51 дүгээр зураг) Холимог графын чиглэлгүй ирмэг бүрийг мөн тэр оройнуудыг холбосон, эсрэг чиглэлтэй хоёр ирмэгээр сольж чиглэлт граф болгон хувиргаж болно. Хот дотор нэг чиглэлийн хөдөлгөөнийг авч үзэх нь графын ерөнхий онолд онц сонирхдог асуудалд хүргэнэ. Гудамж бүр нэг чиглэлтэй байхаар, хотод хөдөлгөөний шинэ дүрэм баримтлуулахаар шийджээ гэж бодъёо. Хэрэв энэ дүрмийг баримтлан явахад хотын нэг газраас нөгөөд тэр болгон хүрч чаддаггүй байсан бол энэ дүрэм зөвшөөрөгдөхгүй нь мэдээж. Хотын аль ч газраас дурын өөр газар явж хүрч болдог байхаар ямар нөхцөлд гудамжнуудад нэг нэг чиглэл тогтоож болох вэ? гэсэн асуулт тавья. Аль ч хос оройнуудын хувьд тэднийг холбосон чиглэлтэй гинж олддог байхаар ямар нөхцөл графын ирмэг бүрд нэг нэг чиглэлийг тогтоож болох вэ? гэж дээрх бодлого графын хэлэн дээр томьёологдоно. Тийм граф бүхэн холбоост граф байх ёстой нь илэрхий. Гэвч холбоост байх нь хүрэлцээтэй нөхцөл биш.

51 дүгээр зураг

Хэрэв $\varepsilon=(A,\ B)$ ирмэг нь A-гаас B-д, мөн B-гээс A-д хүрэх ганц зам болж байвал түүнийг бид ***холбогч ирмэг*** буюу ***хүзүүвч*** гэж нэрлэж байя. Холбогч ирмэг нь графын оройнуудыг ε-оор явалгүй A-гаас хүрч болдог оройнууд ба ε-оор явалгүй B-гээс хүрч болдог оройнууд гэсэн хоёр ангид хуваана. Энэ тохиолдолд граф нь зөвхөн ганц ε ирмэгээр хоорондоо холбогддог. G_1 ба G_2 гэсэн хоёр хэсгээс тогтоно. (52 дугаар зураг) Хотын зураг дээр бол холбогч ирмэг нь хотын

тусдаа хэсгийг хооронд нь холбосон ганц гол зам нь байна. Тэр нь гол дээгүүрх ганц гүүр ч юмуу эсвэл төмөр замын ганц туннель байж болно. Хэрэв ийм гол дээр ганц чиглэл тогтчихвол хотын нэг хэсгээс нөгөөд хүрч чадахгүй болно.

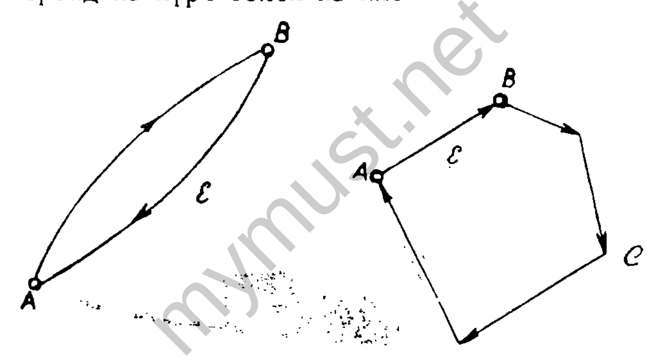
$\varepsilon = (A, B)$ ирмэгийн аль нэг төгсгөл нь жишээлбэл A нь графын ямар ч өөр ирмэгийн төгсгөл болдоггүй бол дээр дурдсанаар (III бүлэг § 1) ийм ирмэгийг төгсгөлийн ирмэг гэдэг билээ. (53 дугаар зураг) A-г B-тэй холбосон үүнээс өөр зам байхгүй учир ε ирмэгийг бас л холбогч ирмэг гэж авч үзэх ёстой. 52 дугаар зургийн G_1 графыг ганц A цэгт «хумигдсан» мэт сэтгэж болно. Хотын дэвсгэр зураг дээр төгсгөлийн ирмэгт мухар гудамж харгалзана. Нэг чиглэлийн хөдөлгөөнөөр A-д орох орц юмуу A-гаас гарах гарц хаагдах учир ийм гудамжинд нэг чиглэлийн хөдөлгөөн тогтоож болохгүй. Хэрэв $\varepsilon_1 = (A_1, B_1)$ ирмэг нь холбогч ирмэг биш бол ε_1-ээр ордоггүй боловч A_1 ба B_1-ийг холбосон өөр зам олдоно. (54 дүгээр зураг) Ийм учраас тийм ε_1 ирмэгийг ***цикл ирмэг*** гэж нэрлэдэг. Иймд графад цикл ба холбогч гэсэн хоёр төрлийн ирмэг байдаг байна. Одоо бид дараахь теоремийг баталж болно.



52 дугаар зураг **53 дугаар зураг** **54 дүгээр зураг**

Теорем 1. *Хэрэв G нь чиглэлгүй, холбоост граф бол түүний холбогч ирмэгүүдийг чиглэлгүй үлдээгээд графын аль ч хоёр орой нь чиглэлтэй гинжээр холбогдсон байхаар, цикл ирмэгүүдэд чиглэл тогтоож болно.*

Хотын дэвсгэр зургийн хувьд энэ дүгнэлтийг дараахь байдлаар томьёолж болно. Зөвхөн гүүрүүд (хэрэв энэ гүүр нь гол дээрх ганц гүүр бол) ба мухар гудамжнуудыг хоёр чиглэлийн хөдөлгөөнтэй үлдээж хотын бүх хэсгүүд хоорондоо тээврээр бүрэн холбогдсон байхаар бусад бүх гудамжнуудад нэг чиглэлийн хөдөлгөөнийг тогтоож болно. Ирмэгүүд дээр зохих чиглэлийг яаж тогтоож болохыг заан үзүүлж, энэ теоремийг баталъя. G графын дурын $\varepsilon=(A, B)$ ирмэгийг сонгон авъя. Хэрэв ε нь холбогч ирмэг бол тэр нь хоёр чиглэлтэй тул B-гээс A-д буцаад ε-ын дагуу явж ирж болно. (55 дугаар зураг). Хэрэв ε нь цикл ирмэг бол тэр нь ямар нэг C циклд орох тул C циклийн бүх ирмэг дээр цикл маягаар чиглэл тогтоож болно. Тэгвэл ирмэгүүд дээр заасан чиглэлийн дагуу явж C циклийн аль ч оройгоос нөгөө оройд нь хүрч болох нь илт.

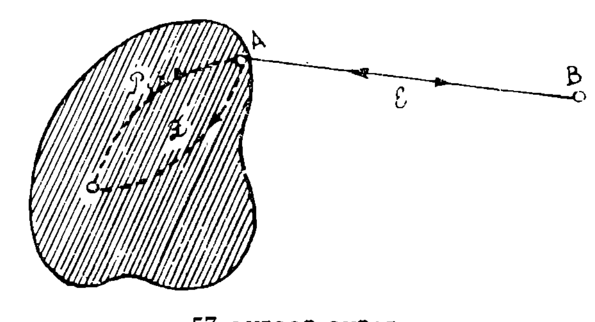


55 дугаар зураг　　　56 дугаар зураг

Энэ процессийг үргэлжлүүлж болно. Авч үзэж буй G графын ямар нэг H хэсгийн дурын оройгоос нь түүний дурын өөр оройд нь нэг чиглэлийн хөдөлгөөний дүрмийг баримтлан хүрч болдог байхаар чиглэл тогтоожээ гэж бодъё. G нь холбоост учир нэг бол H нь G-тэй давхцана, нэг бол H-тай «шүргэлцдэг», өөрөөр хэлбэл, H-д хамаардаггүй (харьяалагдахгүй) боловч нэг орой нь жишээлэхэд A нь H-д хамаардаг (харьяалагддаг тийм $\varepsilon=(A, B)$ ирмэг олдоно.

Хэрэв ε нь холбогч AB ирмэг бол тэр нь дээр болзсон ёсоор хоёр чиглэлтэй байна. Тэгвэл H графын дурын X оройг A-тай холбосон чиглэлтэй R гинж

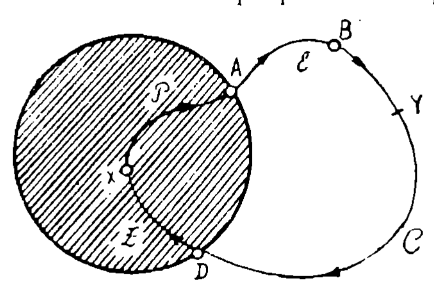
олдоно. Иймд X нь мөн (ε ирмэгээр) B-тэй холбогдоно. Бусад B оройгоор ε-ээр дамжин A-д хүрч болох ба дараа нь чиглэлт z гинжээр явж A-гаас X-д хүрч болно. (57 дугаар зураг)



57 дугаар зураг

H-д ε-г нэгтгэвэл шаардагдсан чанар бүхий өмнөхөөс их, G-ийн хэсэг гарна.

Хэрэв $\varepsilon = (A, B)$ ирмэг нь цикл ирмэг бол тэр нь ямар нэг C циклд хамаарагдана. A-гаас B-д хүрсний дараа H-д хамаарагддаг, C-гийн эхний D орой хүртэл C-гийн дагуу явах чиглэлийг бид C-д тогтооё. Энэ бүх ирмэгүүдийг H-д нэгтгэе. X нь H-ийн дурын, Y нь C-гийн дурын орой болог. Тэгвэл H-д хамаарагддаг, X-ийг A-тай холбосон чиглэлт P гинжийг олж болох ба дараа нь C-гийн дагуу C-гийн Y орой хүртэл явж болно. Буцаагаад Y-ээс C-гийн дагуу D орой хүртэл явж дараа нь H-д хамаарагддаг чиглэлт гинж Z-ээр D-ээс X-д очиж болно. Ийм учраас C-гийн дурдсан ирмэгүүдийг H-д нэгтгэхэд үүссэн чиглэлт граф нь дээрх шаардлагыг хангана. Өөрөөр хэлбэл ирмэгүүдэд

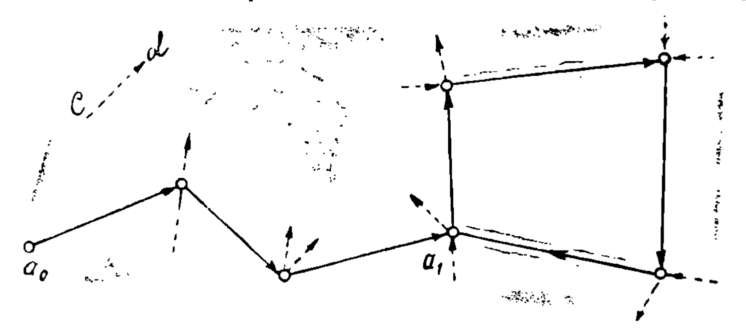


58 дугаар зураг

заагдсан чиглэлийг баримтлан явж C циклийн дурын нэгтгэсэн оройгоос дурын өөр оройд хүрч болох нь илэрхий (58 дугаар зураг). Энэ процессийг үргэлжлүүлэн эцсийн эцэст анх авсан G графыг дээрх шаардлагыг хангасан чиглэлтэй болгож болно.

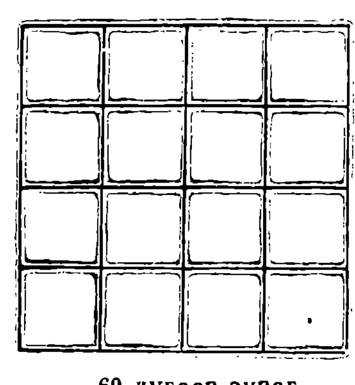
Хотын гудамжнуудад нэг чиглэлийн хөдөлгөөнийг тогтоох нь тээврийн хэрэгслийн хурдыг нэмэгдүүлэх боломжийг олгох боловч урьд энэ хотоор явж үзээгүй жолооч хотыг машинаар тойрох гэвэл түүнд нилээд бэрхшээл тохиолдоно. Хэрэв хотын гудамнууд хоёр чиглэлийн хөдөлгөөнтэй бол жишээлэхэд II бүлгийн 4 §-д тайлбарласан аргыг хэрэглэж болно. Харин тэнд ирмэг бүрийг хоёр чиглэлээр нь явж өнгөрч болдог байсан нь чухал билээ. Хэрэв бүх гудамжнуудад юмуу зарим гудамжнуудад нэг чиглэлийн хөдөлгөөн тогтоогдсон бол графын дурын хоёр оройг холбосон чиглэлтэй гинж ядаж нэг оршин байна гэсэн гарцаагүй нөхцөлтэй үед ч энэ бодлого нь нилээд төвөгтэй юм. Заасан чиглэлүүдийн дагуу графаар яаж явбал эцсийн эцэст түүний бүх ирмэгүүдээр орж болох вэ? гэж энэ бодлогыг ерөнхий байдлаар томьёолж болно. Ингэж тойрохдоо явж өнгөрсөн замаа мартахгүй санаж байх нь яриангүй чухлаас гадна гудамжнуудын сүлжээний үүсгэж буй графын бүдүүвч зургийг урьдчилан бэлтгэсэн байвал нэн ч хялбарчлагдана.

Бид ямар нэг a_0 цэгийг авч энэ цэгээс гарсан аль нэг гудамжийг даган хөдөлье. Тэгээд ямар нэг уулзвар дээр ирээд энд ямар гудамжаар явж ирсэн ямар шинэ гудамжаар шилжихээ зураг дээр тэмдэглээ. Ер нь цаашдаа энэ уулзвараас гарсан бусад гудамжнуудыг тэдний чиглэлийн хамтаар тэмдэглэх нь ашигтай. Ямар нэг ху-

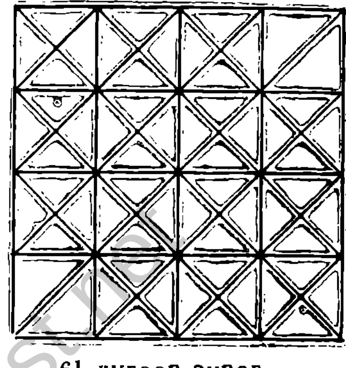


59 дүгээр зураг

гацаа өнгөрсний дараа урьд нь очиж байсан аль нэг a_1 уулзварт бид буцаж ирнэ. (59 дүгээр зураг). Урьдчилан бэлтгэсэн бүдүүвч зургаа харъя. Хэрэв бид бүх гудамжуудаар явчихсан бол манай бодлого бодогдчихно. Хэрэв тийм биш бол урьд явж өнгөрөөгүй (c, d) гудамж олдоно. Өгөгдсөн нөхцөл ёсоор a_1-ийг c-тэй холбосон чиглэлтэй гинж оршин байх ёстой билээ. Бид энэ гинжээр явсны дараа (c, d) гудамжаар явъя.



60 дугаар зураг



61 дүгээр зураг

(a_1-ээс гарсан урьд яваагүй гудамжнаас эхлэх нь нэн тохиромжтой нь мэдээж). Энэ маягаар цаашид үргэлжлүүлбэл эцсийн эцэст бид хотын бүх гудамжуудаар явж чадах нь илэрхий.

Дасгал

1. Энэ зүйлд тайлбарласан аргыг хэрэглэн 14 ба 34 дүгээр зураг дээрх графууд дээр чиглэлүүдийг тогтоо.

2. Бүдүүвч зургууд нь 60 ба 61 дүгээр зураг дээр дүрслэгдсэн хотуудын хувьд энэ бодлогыг бод.

3 §. Оройн зэрэг

I бүлгийн 6 дугаар зүйлд нэг төгсгөл нь A байдаг тийм бүх ирмэгүүдийн тоог A оройн $\rho(A)$ зэрэг гэж нэрлэн чиглэлгүй графын бүх ирмэгүүдийн тоог бид бодож гаргасан билээ. Чиглэлтэй графын орой бүрийн хувьд A-д ордог, A-гаас гардаг ирмэгүүд гэсэн хоёр төрлийн ирмэгүүд байдаг. Үүнтэй харгалзан орой нэг бүрд ордог ирмэгүүдийн тоо $\rho(A)$, гардаг ирмэгүүдийн

тоо $\rho^*(A)$ гэсэн хоёр төрлийн зэрэг байна. Жишээлбэл 62 дугаар зураг дээрх графын хувьд:

$$\rho(A) = 3, \ \rho^*(A) = 2 \qquad \text{байна.}$$

Чиглэлтэй ирмэг $\varepsilon = (A, B)$ нэг бүрд эхний A орой ба эцсийн B орой байна. Ийм учраас графын нийт ирмэгийн тоо N-ийг нэг бол орой тус бүрд орсон бүх ирмэгүүдийг тоолох юмуу эсвэл орой тус бүрээс гарсан нийг ирмэгүүдийг тоолж олж болно. Энэ нь $A_1, A_2, \ldots, A_n$ гэсэн n оройтой чиглэлт G графын нийт ирмэгийн тоо N нь:

$$N = \rho(A_1) + \rho(A_2) + \ldots + \rho(A_n) =$$
$$= \rho^*(A_1) + \rho^*(A_2) + \cdots - \rho^*(A_n)$$

нийлбэрүүдийн нэгтэй нь тэнцүү гэсэн үг юм. Жишээ болгон 49 дүгээр зураг дээрх графыг авч үзье. Энд

$$\rho(\beta) = \rho(D) = 3, \ \rho(A) = 2, \ \rho(F) = 1$$
$$\rho(C) = \rho(E) = 0, \ \rho^*(E) = \rho^*(F) = 3$$
$$\rho^*(c) = 2, \ \rho^*(A) = 1, \ \rho^*(B) = \rho^*(D) = 0$$

байна. Хоёр тохиолдлын алинд нь ч нийлбэр нь 9-тэй тэнцүү байна.

Оройн зэргүүд нь ямар нэг онцлог чанартай чиглэлт янз бүрийн графууд байдаг заримыг дурдъя. Хэрэв графын бүх оройн зэрэг нь нэг ижил r тоотой тэнцүү буюу орой A бүрийн хувьд

$$\rho(A) = \rho^*(A) = r$$

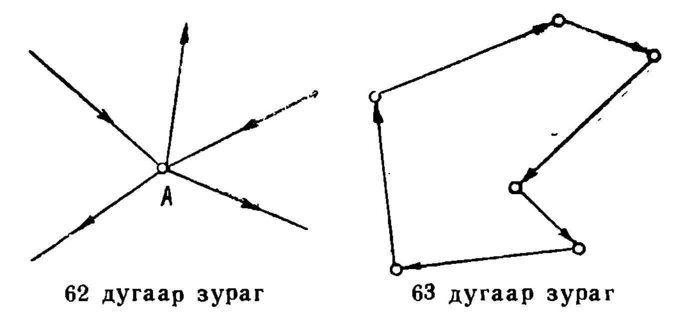
байвал ийм графыг ***r* зэргийн нэгэн төрлийн граф** гэдэг. Цикл нь (63 дугаар зураг) ийм графын хялбар жишээ болно. Энд A орой бүрийн хувьд

$$\rho(A) = \rho^*(A) = 1$$

байх энэ граф нь 1 зэргийн нэг төрлийн граф юм.

Баг бүр нь бусад баг нэг бүртэй тоглох ёстой тойргийн журамтай тэмцээний графыг дахин авч үзье. Эхлээд тэмцээнд оролцсон багуудын тоо тэгш байж гэж үзье. Тэгвэл баг бүр тойрог бүхэнд тоглоно.)

Мөн k тойргийн дараа баг бүр бусад k багтай тоглоно. Харгалзах графын орой бүрд k ирмэг байх ба тэгэхдээ зарим ирмэгүүд нь орсон байна. Тодорхой хэл-



62 дугаар зураг 63 дугаар зураг

бэл хожигдолд харгалзсан нь орсон ялалтад харгалзсан нь гарсан (тэнцэж болохгүй гэж бид үзнэ) байна. Ийм учраас тийм графын A орой бүрийн хувьд

$$\rho(A) + \rho^*(A) = k \quad (1)$$

байна.

Хэрэв багуудын тоо нь сондгой бол тойрог бүрд нэг баг тоглохгүй сул үлдэнэ. Тойрог бүрд тоглосон багийн хувьд (1) тэнцэл хүчинтэй, нэг тойрог алгассан баг B -үүдийн хувьд

$$\rho(B) + \rho^*(B) = k - 1 \quad (2)$$

тэнцэл биелнэ.

Дасгал

1. Таван оролцогчидтой тэмцээний хоёр ба гурав дахь тойргийн дараахь байдалд харгалзах графуудыг байгуул.

2. Хэрэв тэнцээ байж болио гэж үзвэл (1) ба (2) тэнцлүүд яаж өөрчлөгдөх вэ?

3. $n=5, 6, 7, 8$ оройтой $r=2$ зэргийн нэг төрлийн чиглэлт графуудыг байгуул.

4§. Уг гарлын графууд

Хэн нэг хүний уг удмын модыг зурахдаа садан төрлийн хамаарлыг үзүүлэхийн тулд чиглэлт графыг хэрэглэж болно. Гэр бүлийн гишүүн A-гаас гишүүн B-рүү татсан (A, B) ирмэг, B нь A-гийн хүү юмуу охин юмуу гэдгийг заана. Удамшлыг судлахаар амьтад дээр хийсэн туршлагын дүнг тодорхойлон бичихдээ (A, B) чиглэлт ирмэгээр B нь A-гийн шууд удам гэдгийг тэмдэглэн ийм маягийн схемийг биологт өргөн хэрэглэдэг.

Тийм уг гарлын графууд нь бараг илэрхий зарим нэг онцлог чанаруудтай байдаг. Бодгаль бүр (амьтан

нэг бүр) эцэг эх хоёртой байдаг учраас орсон ирмэг, орой бүрд хоёр байх ёстой буюу

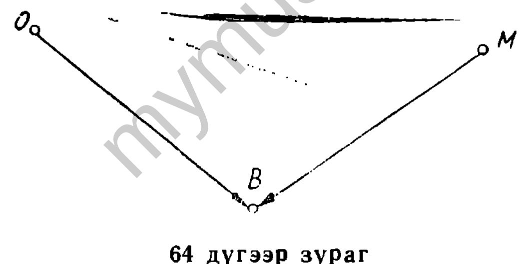
$$\rho^*(B) = 2 \qquad (3)$$

байдаг нь дээрх чанаруудын нэг нь юм. Ингэхлээр уг гарлын графын үндсэн үүр нь 64 дүгээр зураг дээр дүрслэгдсэн шиг хоёр ирмэгээс тогтоно. Энд эцэг O, эх M гэсэн хоёр бодгалийн шууд удам нь B юмаа гэдгийг харуулна (Ердийн моднуудын адил). Уг гарлын мод нь тэнгэрт тултлаа (хязгааргүй) үргэлжилж чадахгүй гэдгийг энд тэмдэглэе. Бидний мэдлэг хязгаарлагдмал учир эцэг эхийн аль нэг нь юмуу эсвэл хоёулаа бидэнд мэдэгдэхгүй болох тийм цаг үе зайлшгүй тохиолдох болно. Ийм учраас (3) тэнцлийг

$$\rho^*(B) \leqslant 2 \qquad (4)$$

гэсэн тэнцэл бишээр солих нь зөв байхсан билээ.

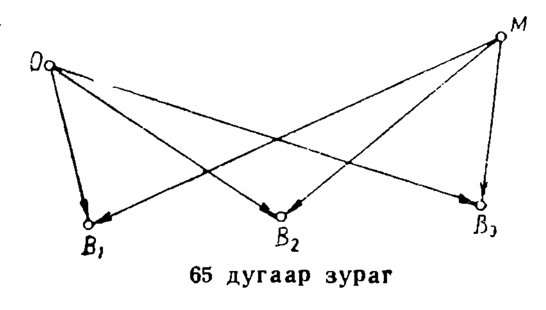
Садан төрлийн харьцаа бүхэн нь уг гарлын граф дээр ямар нэг дүрсээр дүрслэгдэнэ. Жишээлбэл B_1, B_2, B_3 нь O ба M гэсэн нэг эцэг, эхийн хүүхэд учраас эд нар нь нэг бол ах дүү, нэг бол эгч дүү нар юм гэдгийг 65 дугаар зураг харуулж байна.



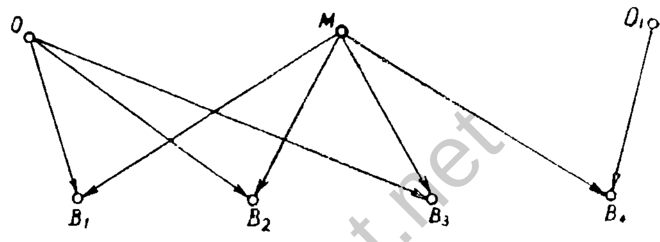
64 дүгээр зураг

Үүний адилаар B_4 нь B_1, B_2, B_3 -тай нэгэн адил M эхтэй, O ба O_1 гэсэн өөр эцэг эхтэй учир эх нэгтэй ах дүү нар болохыг 66 дугаар зураг дээр харуулж байна.

Бид сонирхолтой асуудалд одоо хүрч ирлээ. Орой бүрд нь хоёроос илүүгүй ирмэг орсон, өөрөөр хэлбэл (4) нөхцөлд тохирдог өвөрмөц маягийн чиглэлт граф бидэнд өгчээ гэж үзье. Тэгвэл энэ графыг уг гарлын граф гэж үзэж болох уу? гэсэн асуулт тулгарна. Өөрөөр хэлбэл орой бүрд нь орсон хоёр ирмэг нь 64 дүгээр

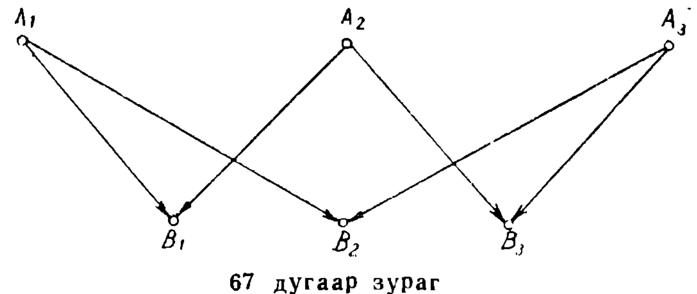


65 дугаар зураг



66 дугаар зураг

зураг дээр дүрсэлсэн дүрсийг үүсгэж байхаар оройнуудыг буюу тэдэнд харгалзах бодигалуудыг O эцгүүдийн ба M эхүүдийн гэсэн хоёр ангид ямагт хувааж болох уу гэсэн асуулт юм. Ингэж тэр болгон хуваах болдоггүйг жишээ (67 дугаар зураг) үзүүлж байна. A_1 нь O ангид хамаарч байжээ гэж бодъё Тэгвэл түүний хүүхэд B_1 нь A_2-ийн хүүхэд тул A_2 нь M ангид хамаарна. Нэгэнт B_3 нь A_3 ба A_2-ын хүүхэд тул A_3 нь мөн O ангид хамаарах ёстой болно. B_2 нь хоёулаа O ангид ордог ба A_2 ба A_3-ийн хүүхэд болж энэ



67 дугаар зураг

граф дээр харгалзаатай зөрчилдөнө. A_1-ийг M ангид хамааруулахад ч мөн үүнтэй адил зөрчил орно.

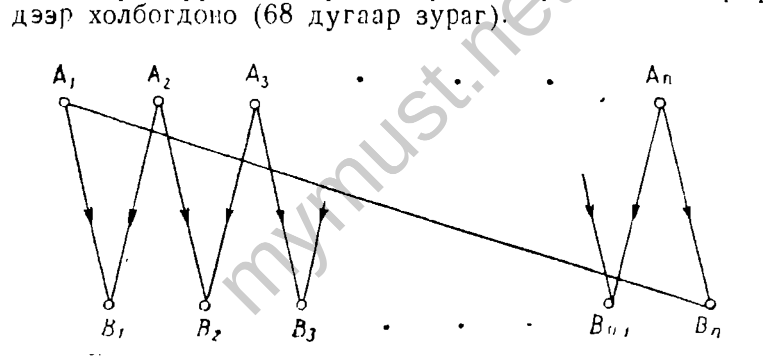
Энэ бэрхшээлийн шалтгааныг олохын тулд ямар нэг A_1 оройгоос эхлэн түүнийг O ангид хамааруулъя. Хэрэв A_1 нь B_1-гийн эцэг эхийн нэг бол нөгөө A_2-ийг M ангид хамааруулъя. Хэрэв A_2 нь мөн B_2-ийн эцэг эхийн нэг A_3 орой түүний нөгөө нэг эцэг эх нь бол A_3-ыг O ангид хамааруулах гэх мэтчлэн үргэлжлүүлэв. Тэгвэл ээлж ээлжээр O ба M ангид ордог бодигалуудын

$$A_1,\ A_2,\ \cdots,\ A_n \tag{5}$$

гэсэн „ээлжлэх" дараалал гарна. Зэргэлдээ хоёр ирмэг бүр нь эсрэг чиглэлтэй

$$(A_1,\ B_1),\ (B_1,\ A_2),\ (A_2,\ B_2),\ (B_2,\ A_3)\cdots$$

гэсэн ирмэгүүдийн дараалаар эдгээр нь манай граф дээр холбогдоно (68 дугаар зураг).



68 дугаар зураг

68 дугаар зураг дээрх шиг A_1 ба A_n нь B_n-ийн эцэг эх байжээ гэж бодъё. Энэ нь

$$(A_1B_1),\ (A_2,\ B_1)\ (A_2B_2),\ \ldots,\ (A_n,\ B_n)\ (A_1,\ B_n) \tag{6}$$

гэсэн „ээлжлэх" циклийг өгнө. Тэгвэл A_1 ба A_n өөр өөр ангид хамаарагдах ёстой нь илэрхий ба иймд n нь тэгш тоо байх ёстой байна. Энэ нь биднийг доорх үр дүнд хүргэнэ.

Төрлийн нөхцөл. *G нь (4) нөхцөлд тохирдог, чиглэлт граф болог. Хэрэв G графын оройнуудыг M „эхүүдийн" O „эцгүүдийн" гэсэн хоёр ангид дээрх нөхцөлд тохируулан хувааж болдог байвал дурын „ээлжлэх" цикл дэх A_i эцэг эхчүүдийн*

(5) дараалал нь тэгш тооны гишүүдээс тогтоно.

Энэ нөхцөл нь „ээлжлэх“ (6) циклийн ирмэгүүдийн тоо нь дөрөвт хуваагдана гэсэнтэй адил чанартай юм. Хэрэв төрлийн нөхцөл биелбэл графын оройн бүрийг дээрх ангиудын нэгэнд хамааруулж болно. A_1 оройгоос эхлэн түүнийг дурын (O-д юмуу M-д) ангид хамааруулъя. Хэрэв A_1 нь хүүхэдгүй юмуу эсвэл хүүхэдтэй ч гэсэн тэдний өөр эцэг эх бидэнд мэдэгдэхгүй бол A_1-ийн ангийг тодорхойлсноос ямар ч мөрдөлгөө гарахгүй. Хэрэв A_1 нь хүүхэдтэй бол A_1-ээс эхэлсэн элдэв янзын „ээлжлэх“ гинжүүдийг авч үзье. Үүгээр (5) дарааллын аль ч гишүүнийг ямар ангид орох нь нэг утгатай тодорхойлогдоно. Үнэндээ хэрэв A_1-ээс A_n-д хүрсэн хоёр гинж байгаад A_n нь O ба M-д хоёуланд нь хамаардаг байсан бол нэгдүгээр гинжээр A_1-ээс A_n-д хүрч хоёрдугаар гинжээр A_1-д буцаж ирж болох тул „ээлжлэх“ гинжийн оройн тоо сондгой болж төрлийн нөхцөлтэй зөрчилдөнө.

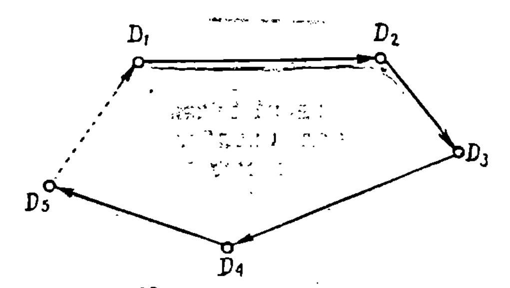
Эхний удаагийн энэ байгуулалтаар графын бүх оройн ангийг тодорхойлж чадахгүй. Дараагийн алхамд ямар ч „ээлжлэх“ гинжээр A_1-тэй холбогдоогүй ямар нэг A_1' оройг авч түүнийг дурын ангид хамааруулан дээрх байгуулалтыг хийе. Дараа нь A_1 ба A_1' -ийн алинтай нь ч холбогдоогүй ямар нэг гурав дахь A_1'' оройг эхлэх орой болгон авах зэргээр графын орой бүр нь тодорхой ангитай болох хүртэл үргэлжлүүлье. Ангийг тодорхойлох энэ арга ямар нэг бодгалийн эцэг эх нь хоёулаа нэг ангид орчих тийм зөрчилд хэзээ ч хүргэхгүй нь илт.

Графын оройнуудыг хоёр ангид зөрчилгүй хуваах боломжийг олгодог нөхцөлийг олсны дараа энэ нөхцөлд граф бүхний удамшил судлах ямар нэг туршлагад харгалзах граф гэж үзэж болох уу гэсэн асуудал тавих нь зүйн хэрэг юм. Үүний тул бас нэг нэмэлт хязгаарлалтыг графад тавих хэрэгтэй гэдгийг харахад хялбархан.

D_i — нэг бүр нь өмнөхийнхөө удам нь байх

$$D_1,\ D_2,\ \ldots\ D_n \qquad (7)$$

гэсэн бодлогуудын дараалал байж гэж саная. Энэ нь граф дээр чиглэлт гинжээр 69 дүгээр зураг дүрслэгджээ. Энэ бодгалиуд цаг хугацааны хувьд мөн ийм эрэмбэтэй төрсөн байх ёстой. Ийм учраас D_n нь D_1-ийн эцэг нь юмуу эх нь байж болохгүй. Өөрөөр хэлбэл манай граф чиглэлтийг циклийг агуулж болохгүй. Ийм графуудыг ***циклгүй графууд*** гэж нэрлэдэг.



69 дүгээр зураг

Чиглэлт ямар граф удамшилтын туршилтыг тодорхойлж байж болохын гарцаагүй гурван нөхцөлийг бид оллоо. Энэ нь

1. *Бүх А-гийн хувьд* $\rho^*(A) \leqslant 2$, *өөрөөр хэлбэл, аль ч оройд хоёроос илүү ирмэг ороогүй.*

2. *„Ээлжлэх" циклийн ирмэгийн тоо нь дөрөвт хуваагддаг.*

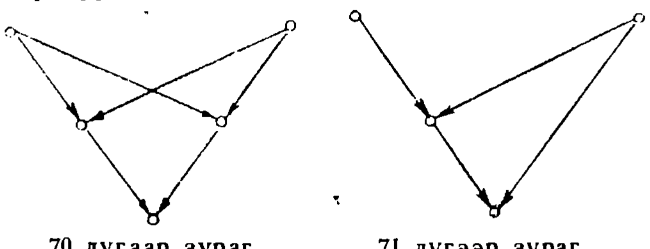
3. *Граф нь циклгүй байх гэсэн нөхцөлүүд* юм.

Үүний урвууд хэрэв энэ гурван нөхцөл биелж байвал бүх оройг зохих ёсоор ангиудад хувааж болох ба ингэхлээр графыг бүхэлд нь удамшлын туршилтыг тодорхойлж байгаа граф гэж үзэж болно. Энд (A_0, B) ирмэг нь A_0-ийн шууд удам B мөн гэдгийг заах ба B-г төрүүлэгч нөгөө нэг нь (хэдийгээр бидэнд мэдэгдээгүй байгаа боловч) өөр ангийн бодгаль юм. Ийм учраас энэ гурван нөхцөлийг удамшлын ерөнхий схемийн захирагдах нөхцөлүүд гэж үзэж болно. Эдгээр нөхцөлүүдийг жирийн хэлэн дээр хөрвүүлбэл:

1. Амьтан нэг бүр хамгийн олондоо л хоёрын дундаас төрнө.

2. Төрүүлэгчдийн нэг нь эцэг, нөгөө нь эх байна.

3. Хэн ч өөрөө өөрийнхөө удам болохгүй гэсэн илт үнэн зүйлүүд юм.



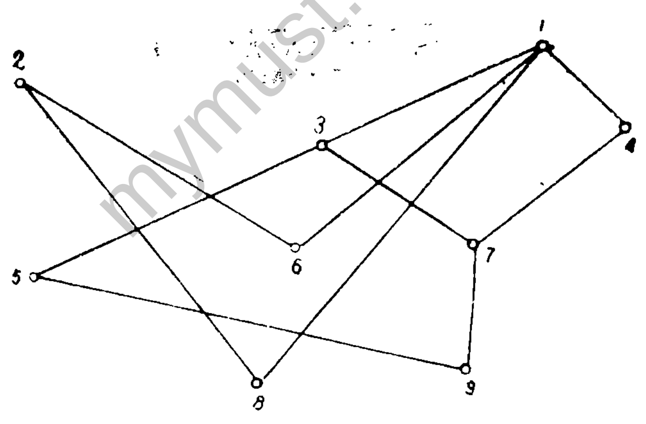
70 дугаар зураг **71 дүгээр зураг**

Эцэст нь удамшлын графын хувьд бас нэг тайлбарыг хийе. Бид манай графыг удамшлын дурын туршилтын граф гэж үзсэн билээ. Хэрэв бид хүний тухай ярьж байгаа бол манай уг удмын модноос зарим нэг өвөрмөц дүрсийг зайлуулах хэрэгтэй болно. Жишээлбэл хэн ч эгч, дүүтэйгээ гэрлэдэггүй, хэн ч ах дүүтэйгээ гэрлэдэггүй учир манай граф 70 дугаар зураг дээрх шиг дүрсийг агуулахгүй. Мөн хэн ч өөрийн эцэг эхтэй гэрлэж болохгүй учир 71 дүгээр зураг дээрх дүрс ч байж болохгүй гэх мэтчлэн байна.

Дасгал

1. Хоёр бодгаль а) бүл ах дүү (эсвэл үеэл эгч дүү, эсвэл үеэл ах дүү), б) авга эгч (юмуу авга ах) ба ач хүү (юмуу зээ охин) байхад харгалзах графыг зур.

2. 72 дугаар зураг дээрх графын оройнуудын ангийг элдэв бүх аргаар тодорхойл.



72 дугаар зураг

3. а) нэг эхтэй ах, дүү; б) өвөг эцэг ба ач охин; в) авга ах, ач охин юмуу авга эгч, ач хүү хоорондоо гэр бүл болж үл болохыг хориглосон хориглолтыг удамын модноос зайлуулахад үүсэх графыг зур.

VI бүлэг

ТОГЛООМУУД БА ТӨВӨГТЭЙ БОДЛОГУУД

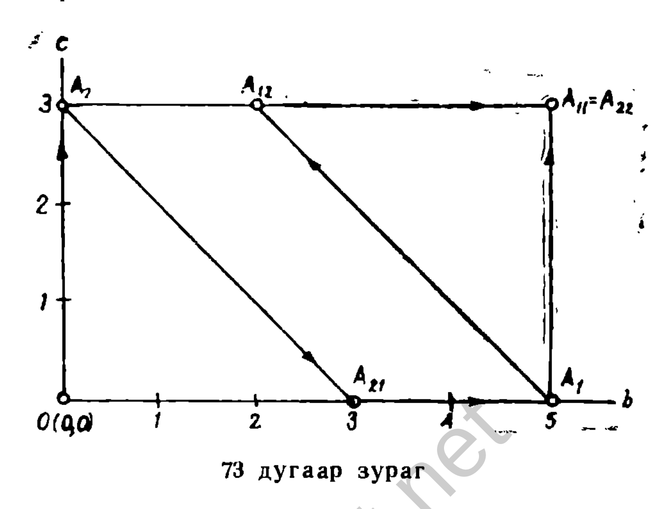
§ 1. Ухаан сорих бодлого ба чиглэлт граф

Олонхи төвөгтэй бодлогуудыг графын хэлэн дээр тайлбарлаж болдгийг бид дээр дурдсан (II бүлэг, 6 §) билээ. Тэгэхдээ янз бүрийн байрлалууд нь графын оройнууд, нэг байрлалаас нөгөөд шилжих боломжид нь графын ирмэг харгалздаг билээ. Төвөгтэй бодлогын бодолт өгөгдсөн анхны байрлалаас нэг юмуу хэд хэдэн эцсийн буюу хожлын байрлалд хүргэх гинжийг олох бодлогод шилжих юм. Ийм бодлогод бид чиглэлгүй графуудыг ашиглаж байсан. Нэг байрлалаас нөгөөд шилжиж болдог бол буцаад шилжиж болно гэдгийг дуугүй зөвшөөрсөн учраас л ингэж дүрсэлсэн билээ. Усчны тухай, хартай гурван хар хүний тухай, шатрын хөлгөн дээрх морины хөдөлгөөний тухай бодлогуудад чухамдаа ийм байсан билээ. Харин олонхи бодлогуудад шилжилт нь зөвхөн нэг чиглэлт боломжтой байдаг. Ийм тохиолдлуудад аргагүй чиглэлт графыг хэрэглэх хэрэгтэй болдог. Хэрэв зарим шилжилт нь хоёр чиглэлдээ боломжтой бол харгалзсан оройнууд нь эсрэг чиглэлтэй хоёр ирмэгээр холбогдоно. Энэ тохиолдолд харгалзсан ирмэгүүдийг чиглэлгүй үлдээн холимог графыг хэрэглэж болно. Ийм бодлогыг бодохын тулд эхний байрлалаас эцсийн байрлалд хүргэх чиглэлтэй гинжийг граф дээр олох хэрэгтэй болно.

Ихэд дэлгэрсэн эртний нэг бодлогыг жишээ болгон авч үзье. Хэн нэг хүнд харгалзан 8, 5, 3 литрийн багтаамжтай A, B, C гэсэн гурван сав байжээ. A сав нь дүүрэн устай[1] байсан ба түүний усыг A, B, C-гээс

[1] Энэ номонд бид хэрэглэсэн ус гэсэн үгийн оронд „жимсний архи“ гэсэн үг байгааг сануулъя (ред).

өөр сав хэрэглэлгүйгээр хоёр саванд тэнцүүлж хийх хэрэг гарчээ.



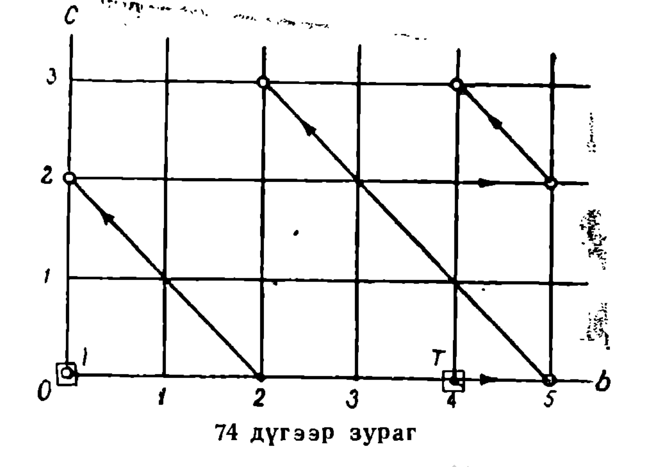
73 дугаар зураг

Графын аргаар бодлогыг бодохын тулд доорхи схемийг (бүдүүвчий) ашиглая. *B* ба *C* савууд дахь усны хуваарилалт бүрд (*b*, *c*) хос харгалзуулъя. Үүнд *b* нь *B* савны, *c* нь *C* савны усны хэмжээ юм. Эхлээд (*b*, *c*) нь (*o*, *o*) утгатай байх ба эцсийн байдалд *A* ба *B* сав тэнцүү устай *C* нь хоосон байх шаардлагатай учир эцсийн хуваарилалтад (4, 0) гэсэн утга харгалзана.

Координаттай хавтгай[1] дээр (*b*, *c*) хос бодит тоо бүхнийг цэгээр дүрсэлж болох учраас савнууд дахь усны элдэв хуваарилалтад харгалзах цэгүүдийг графын оройнууд гэж үзэж болно. *B* ба *C* саванд бутархай тооны литр ус юүлж болохгүй нь бодлогын томьёоллоос илт учраас сайндаа л *b* нь 0, 1, 2, 3, 4, 5, *C* нь 0, 1, 2, 3 гэсэн утгуудыг авч болно. Ийм учраас байж болох элдэв (*b*, *c*) хосуудын тоо нь $6 \times 4 = 24$, өөрөөр хэлбэл, манай граф нь 24 оройтой байна. Савуудад усыг юүлэх замаар өгөгдсөн (b_0, c_0) хуваарилалтаас (b_1, c_1) хуваарилалтад шилжиж болдог байвал (b_0, c_0) оройг (b_1, c_1) оройтой чиглэлт ирмэгээр холбоё.

---

[1] Координаттай хавтгай гэсэн үгийг хавтгайд тэгш өнцөгт координатын систем сонгон авсан гэж ойлгоорой. (Ред).



74 дүгээр зураг

Манай жишээн дээр эхний $O(o, o)$ байрлалаас OA_1 ба OA_2 (73 дугаар зураг) ирмэгүүд гарна. A_1 оройгоос гарч $A_{11}(5,3)$ ба $A_{12}(2, 3)$ оройнуудад, A_2 оройгоос бол $A_{21}(3,0)$ ба $A_{22}(5,3)$ оройнуудад хүрч болно. Дараа нь эдгээр байрлалуудаас тоглоомын дүрмийг баримтлан явж хүрч болох оройнуудыг бид тоочиж болох ба энэ маягаар цааш үргэлжлүүлж болно. Хэрэв төгсгөлийн $T(4,0)$ оройд үнэндээ хүрч болох байвал саяын арга нь эцсийн эцэст түүнд хүргэнэ. Үнэндээ O-оос T-д очсон гинж оршин байвал O-оос T-д хүрсэн гинжүүд дотроос аль болох цөөн тооны ирмэг агуулсан гинж буюу усыг юүлэхэд аль болох бага хугацаа зарцуулах утгаар „хамгийн сайн" шийдийг олох асуудал тавьж болно. Ер нь ямар нэг O оройгоос эхэлж өгөгдсөн T оройд олон янзын замаар хүрч болох ба O оройгоос дурдсан аргаар явж хүрч болдоггүй тийм U оройнууд ч байна. Манай жишээн дээр U (1, 1), (1, 2), (2, 1), (2, 2), (3, 1), (3, 2), (4, 1), (4, 2) оройнууд нь хүрч болдоггүй тийм оройнууд юм.

Өөрөөр хэлбэл усны бололцоот бүх хуваарилалтанд анх харгалзуулсан 24 оройны 8 нь огт үл хүрч орой болох ба зөвхөн 16 орой нь л бодлогод тавьсан зорилгод хүргэнэ гэж хэлж болно.

Бодлогын бодолтод хийгдэх бүх юүлэлтүүдийг (хөрвүүлэн) буцаан хийж болох учраас энэ бодлогын бодолт нь чиглэлийн графын аргыг хэрэглэхийн тийм ч сайн тайлбар болж чадахгүй гэж дурдъя. Хэрэв бид өөр

хуваарилалтаас жишээлэхэд B ба C савнууд нэг нэг литр устай байсан үеэс эхэлсэн өөрөөр хэлбэл (1,1) оройгоос эхэлсэн бол бүх ирмэгүүд нь (1,1) оройгоос гарна гэдгийг мөн сануулъя.

Дасгал

1. Юүлэлтийг давтан хийлээ ч гэсэн U-ийн нэг хуваарилалтаас нөгөөд хэзээ ч шилжиж чадахгүй гэдгийг үзүүл.

2. 74 дүгээр зураг дээр U олонлогийн цэгүүдийг дүрсэл. Тэдгээрийн байрлал юу заах вэ?

3. Савнуудын багтаамж өмнөхөөс ялгаатай жишээлэхэд $A = 12$, $B = 7$, $C = 4$ байх үед дээрх бодлогыг бод.

2 §. Тоглоомын онол

Бодлого бодохдоо хүн уул бодлогонд агуулагдсан бэрхшээлтэй тулгардаг бол хүн тоглоом тоглохдоо өөр хүний эсрэг тоглодог. Математикийн зугаатай бодлогын салбарт бид ийнхүү шилжсэн тул тоглоомын онолын талаар зарим нэг ерөнхий тайлбарыг өгье. Сүүлийн жилүүдэд хоёр оролцогчидтой тоглоомын онол нь математикийн судалгааны чухал салбар болж ирлээ. Хэрэглээний шинж чанартай олон бодлогуудад энэ онолыг хэрэглэж байна. Жишээлбэл тоглоомын онолыг эдийн засаг, техникт нарийн төвөгтэй зорилгыг эдийн засгийн хувьд хамгийн хямд юмуу үр ашигтай гүйцэтгэх арга замыг эрж олохтой холбогдсон асуудалд хэрэглэж байна.

Бид энд тоглоомын ерөнхий онолыг судлахгүй. Нүүдлүүд нь тохиолдлоос хамаардаггүй харин тоглож буй хүмүүсийн хүсэл зоригоос хамаардаг тийм тоглоомуудын стратегийг тодорхойлоход чиглэлт графыг яаж ашиглаж болохыг бид үзүүлье. Тийм тоглоомуудын төгс сайн жишээ нь шатар, даам болж чадахаас гадна мөн тэг ба чагт гэдэг энгийн тоглоом ч ийм тоглоомын тоонд орно.

Бид иймэрхүү тоглоомуудад ямар нэгэн байрлалуудад нь оройнуудыг, нэг байрлалаас нөгөөд шилжих шилжилтүүд нь чиглэлт ирмэгүүдийг харгалзуулна. Байрлал нэг бүрд A_1^* ба A_2^* хоёр тоглогчийн хэн нь нүүх эрхтэй вэ? гэдгийг мөн бид мэдэж байх ёстой. Иим учраас бүх байрлалуудыг жишээлэхэд A_1ба A_2гэсэн хоёр бүлэгт

хувилж нүүдэл бүрийг A_1-ээс A_2-д очсон юмуу эсвэл A_2-оос A_1-д очсон чиглэлт ирмэгээр дүрслэх нь зохистой юм. Нэгэн ижил байрлал A_1 ба A_2 -ын хоёуланд нь нэгэн зэрэг ч харгалзаж болох юм.

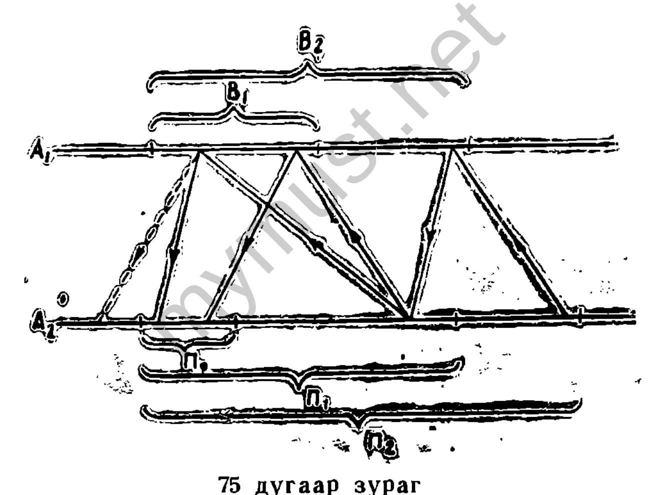
Тэгвэл тоглоом нь A_1 тоглогч ямар нэг чиглэлт ирмэгийн дагуу нүүдэл хийж олонлогийн шинэ байрлалд очиход харин A_2^* нь A_1-рүү буцна.

Үүнийг бид ганц хүүтэй бөгөөд тэр хүү нь хоёр олонлогийн хооронд чиглэлт ирмэгүүдээр наашаа цаашаа хөдөлдөг тийм тоглоом гэж үзэж болно. Тоглогч бүр байрлал бүрд чухам ямар нүүдэл хийх хүсэлтэйгээ мэдэж байх нь мэдээж. Ийм учраас тоглогч бүр ямар нэг дэвтэрт өөрийнхөө стратегийг биччихсэн өөрөөр хэлбэл өгөгдсөн нөхцөлүүдэд чухам ямар нүүдлийг сонгон авахаа заачихсан байж гэж санаад бид тоглогчдоос ч ор татгалзаж болно. Иймд хэрэв тоглоомын граф нь мэдэгдсэн өөрөөр хэлбэл тоглогчдын стратеги ба нүүдлүүд нь мэдэгдэж л байвал тоглоом нь бүрэн тодорхой болно.

A_1^* хожихын тулд ямар нэг эхний байрлалаас, A_2^* тоглогчийн тоглолтоор заримдаа тодорхойлогдсон чиглэлт гинжээр явж A_2 олонлогийн B_{A_1} хожлын байрлалд хүрэх ёстой. Үүнгэй адилаар A_2^* хожихын тулд түүний сүүлийн нүүдэл нь A_1 олонлогийн B_{A_2} хожлын байрлалд хүргэх шилжилт байх ёстой. Доорх хоёр тохиолдлын нэгэнд нь тэнцээ гарч болно. Нэг талаас A_1-д юм уу эсвэл A_2 олонлогт ганц ч ирмэг гараагүй тийм төгсгөлийн байрлалууд байж болно. Ийм байрлалуудыг ***тэнцээний байрлалууд*** гэж нэрлэж болно. Шатарт тийм байрлалыг „жигд" гэж нэрлэдэг. Тэнцээний нөгөө маяг нь тоглоом „төгсгөлгүй үргэлжлэх" явдал юм. Энэ байдлыг зайлуулахын тулд ихэвчлэн зарим нэг нүүдлүүдийг давтан нүүхэд тоглоом дуусна гэсэн дүрэмтэй байх шаардлагатай юм. Шатрын нэгэн ижил нүүдлийг дараалан 3 удаа давтан нүүвэл л тэнцээ болов гэж тоолдог ба 50 нүүдлийн туршид ямар ч бод автагдахгүй юмуу эсвэл ямар нэг хүү нүүдэл сэлгэхгүй бол тэнцээ боллоо гэж үзэх дүрэм байдгийг сануулъя.

Одоо бид тоглоомын дүр зургийг тодорхой харж чадах боллоо. Ямар нөхцөлүүдэд зохих ёсоор тоглоход A_1^* (эсвэл A_2^*) заавал хожих вэ гэсэн нэг чухал асуудал л үлдлээ. Энэ асуултад графын тусламжтайгаар

хариулж болно. Үүнийг тодорхой харах хамгийн сайн арга нь A_1^* -ийн хожлын төгсгөлийн байрлалуудаас буцаж явах явдал юм. Энэ байрлалууд нь A^*_2-ийн хожигдлын байрлалууд учраас тийм бүх байрлалуудыг $\Pi_0(A_2)$ гэж тэмдэглэе. $\Pi_0(A_2)$-д хүргэдэг ирмэг буюу нүүдлүүдтэй тийм байрлалууд A_1 олонлог дотор бий. A_1^* нь тийм байрлалуудаас нэг нүүдэл хийж хожно. Энэ олонлогийг $B_1(A_1)$ гэж бид тэмдэглэе. Нэг бол $\Pi_0(A_2)$ олонлогт хамаардаг юмуу эсвэл тэдгээрээс $B_1(A_1)$-д зөвхөн шилжиж болдог тийм байрлалуудыг $\Pi_1(A_2)$ гэж тэмдэглэе. Хэрэв A_2^* тоглогч тийм байрлалд очсон бол тэр нэг бол хожигдчихсон байна, эсвэл нэг нүүдлийн эцэст хожигдолд заавал хүрнэ. Ийм учраас бид энэ их $\Pi_1(A_2)$ (75 дугаар зураг) олонлогийг A_2-ийн хожигдлын байрлалуудын олонлог гэж үзэж болно.



75 дугаар зураг

A_2^*-ийн хожигдлын байрлалуудын олонлогийг өргөтгөх энэ процессийг цааш үргэлжлүүлж болно. Тэгвэл $\Pi_1(A_2)$-д хүргэдэг ирмэгүүдтэй A_1-ийн оройнуудын ямар нэг $B_2(A_1) \supseteq B_1(A_1)$[1] олонлог гарна. Тийм байрлалуудаас A_1^* ихдээ л хоёр нүүдлийн эцэст хожно. Цаашилбал бүх ирмэгүүд нь $B_2(A_1)$-д очдог, A_2^* нь ихдээ хоёр нүүд-

[1] $\supseteq$ тэмдэг: агуулагдана буюу давхцана гэсэн утгатай,

лийн эцэст хожигддог тийм байрлалуудын $П_2(A_2)$ олонлог гарна. Энэ сэтгэлгээг давтан хэрэглэвэл A_1^* нь $B_k(A_2)$ олонлогт орсон байрлалд хүрсэн үед тэр k нүүдлийн эцэст хожиж чаддаг юмуу түүнээс өмнө хождог тийм байрлалуудаас тогтсон олонлогуудын

$$B_1(A_1) \subseteq B_2(A_2) \subseteq \cdots$$
$$П_0(A_2) \subseteq П_1(A_2) \subseteq \cdots$$

гэсэн A_1 ба A_2 олонлогуудад харгалзсан хоёр дараалалд хүрнэ. Иймд хэрэв A_1^*-ийн эхний байрлал нь $B_k(A_1)$ олонлогт хамарч байвал A_1^* нь ямагт хожиж болох ба хэрэв энэ нь тийм биш бол A_1^*-г энэ байрлалд хүрч ирэхийг нь A_1^* саатуулахыг хичээх ёстой. A_2^*-ийн хожилт байрлалуудыг мөн ийм маягаар олж олох ба харин бусад бүх тохиолдлуудад тоглоомыг ямагт тэнцээнд хүргэж болно.

Графын онолтой бага хэмжээгээр дөнгөж танилцан тоглоомын бүх байрлалыг тунгаан шинжлэх боломжтой болж байгаагаараа энэ сэтгэлгээ нь зарчмын хувьд гоё юм. Хэрэв үүнийг практик дээр ямагт хэрэгжүүлж болдогсон бол тоглогч бүр ямар нүүдэл нь муу, ямар нүүдэл нь сайн гэдгийг ямагт мэдэх болж хоёр хүн тоглодог тийм тоглоомууд хэтэрхий илт зүйл болж хувирахсан билээ. Жишээлбэл бидний дуртай тоглоом болох шатар тийм гунигт байдалд хүрдэггүй нь л завшаантай хэрэг юм. Элдэв байрлалын тоо маш их учраас оюун ухаан их зарж тоглодог тоглоом гэж нэрд гарсан шатрын нэр хүндийг манай хамгийн их чадалтай тооцон бодох машинууд ч унагааж чадахгүй байх. Цагаанаар тоглох нь тоглогчид ямар нэг хэмжээний ашигтай байдгийг томоохон тэмцээний туршлагаар харуулж байгаа боловч суут ер бишийн тоглогч цагаанаар тоглон ямагт хожилд хүрч болох уу? өөрөөр хэлбэл цагааны байрлал нь хожлын байрлалд багтах уу? гэсэн асуулт хэдийд ч шийдвэрлэгдэхгүй үлдэх байх.

Эцэст нь жишээ болгож хоёр хялбар тоглоомыг авч үзье. Нэгдүгээр нь доорх тоглоом юм. Ширээн дээр бөөн чүдэнз байжээ. A_1^* ба A_2^* тоглогчид ээлж ээлжээр хэд хэдэн чүдэнзийг эндээс авна. Тэгэхдээ жишээлэхэд нэг удаа авахад 1-ээс 5 хүртэл тооны чүдэнз авч болдог юм гэж үзье. Хэн сүүлийн чүдэнзийг авна тэр хүн хожно. A_1^* тоглогч нь 1,2,3,4 юмуу 5 чүдэнз үлдсэн үед л $B_1(A_1)$ байрлалуудаас хожлын 0 байрлалд хүрч чадна. 6. чүдэнз

үлдэх ганц тохиолдолд л A_2^* нь өөрийн эрхгүй $B_1(A_1)$-д орж ирнэ. 7,8,9,10 юмуу 11 чүдэнз үлдэх тохиолдлуудад л A_1^* тоглогч энэхүү 6-гийн тоонд хүрч чадна. Ийм учраас $B_2(A_1)$ олонлог нь 6-гаас бусад бүх 1-ээс 11 хүртэлх тоонуудаас харин $П_2(A_2)$ олонлог нь 0,6,12 тоонуудаас тогтоно. Энэ маягаар үргэлжлүүлэн сэтгэвэл чүдэнзний тоо нь 6-д хуваагдахгүй тийм бүх байдлуудад A_1^* хожиж болох нь харагдана. Иймээс тэр нүүдэл бүрийнхээ эцэст л 6-д хуваагддаг тооны чүдэнз үлдээх хэрэгтэй байна. Хэрэв анх байсан чүдэнз нь 6-д хуваагддаг ба хэрэв A_1^* нь эхэлж нүүсэн бол A_2^* яг ийм маягаар ямагт хожиж болно.

Манай хоёрдугаар жишээ нь «ним» гэдэг хятадын эртний тоглоом юм. Энэ нь хялбар байдлаараа дараахь байдалтай байна. Ширээн дээр гурван хэсэг хүүнүүд байна. Нүүдэл нэг бүр нь тоглогч аль нэг хэсгийг сонгон түүнээс доор хаяж нэг хүүг авах явдал юм. Тэгэхдээ тэрхүү хэсгийг бөөнөөр нь авч болохыг зөвшөөрнө. Энд бас хэн сүүлийн хүүг авна, тэр хүн хожно. Бид энд зөвхөн хожлын бүх байрлалуудыг нь л тоймлоё. Дашрамд энэ нь тоог хоёртын тооллын системд бичих дасгал болно. Бүхэл тоог хоёртын зэргүүдээр задлахыг та бүхэн лав мэдэх байх. Тийм задаргааны эхний хэд нь гэвэл:

$1=(1)$
$2=(1,0)=1\cdot 2+0$
$3=(1,1)=1\cdot 2+1$
$4=(1,0,0)=1\cdot 2^2+0\cdot 2+0$
$5=(1,0,1)=1\cdot 2^2+0\cdot 2+1$
$6=(1,1,0)=1\cdot 2^2+1\cdot 2+0$
$7=(1,1,1)=1\cdot 2^2+1\cdot 2+1$
$8=(1,0,0,0)=1\cdot 2^3+0\cdot 2^2+0\cdot 2+0$
$9=(1,0,0,1)=1\cdot 2^3+0\cdot 2^2+0\cdot 2+1$
$10=(1,0,1,0)=1\cdot 2^3+0\cdot 2^2+1\cdot 2+0$

Эдгээр хоёртын тоонуудын «оронгоор нэмэх» гэж нэрлэдэг үйлдэл нь нилээд өвөрмөц үйлдэл юм. Энэ үйлдлийг яаж гүйцэтгэдгийг үзүүлэхийн тулд хоёр жишээ авч үзье.

$$\begin{array}{r} 1\,0\,1\,1 \\ 1\,0\,1 \\ 1\,1\,0 \\ 1\,1\,0\,0 \\ \hline 0\,1\,0\,0 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 1\,1\,1\,1 \\ 1\,1\,0 \\ 1\,1 \\ \hline 1\,0\,1\,0 \end{array}$$

Энэ нэмэх үйлдлийг ерийн нэмэх шиг баганаар гүйцэтгэх боловч харгалзах баганын 1-ийн тоо нь тэгш бол нийлбэрийг 0-той тэнцүү, сондгой бол 1-тэй тэнцүү гэж тоолно. Эндээс үзвэл энэ нэмэх нь хоёртын тооллын системийн ерийн нэмэх үйлдлээс ялгаатай байна.

Одоо «ним» тоглоомоо дахин авч үзье. Байрлал бүрийн хувьд гурван хэсэгт байгаа хүүнүүдийн тоог оронгоор нэмсэн нийлбэрийг олъё. Хэрэв энэ тоонууд нь жишээлэхэд 13,12,7 юмуу 14,11,5-тай тэнцүү байхад харгалзсан нийлбэрүүд нь

1	1	0	1		1	1	1	0
1	1	0	0		1	0	1	1
	1	1	1			1	0	1
0	1	1	0		0	0	0	0

хэлбэртэй байна. Оронгоор нэмсэн нийлбэр нь хоёрдугаар жишээн дээрх шиг дан тэгээс тогтсон тийм байрлалыг ***тэг байрлал***, харин бусад бүх байрлалуудыг ***регуляр байрлалууд*** гэж нэрлээ. A_1^* нь тэг байрлалуудад хожигдох ба харин бүх регуляр байрлалууд хожино. Үүнийг хялбараар баталж болно. Хэрэв A_1^* регуляр байрлалд оршиж байвал A_2^* тэг байрлалд орохоор хэд хэдэн хүүг тэр авч чадна. Үүний тулд нийлбэрийн эхний нэг байгаа, тэр баганад нэгтэй тийм тооны хүү бүхий хэсгийг сонгон авч энэ хэсгээс хэд хэдэн хүүг шинэ (оронгоор нэмсэн) нийлбэр нь тэгтэй тэнцэхээр авч болно. Жишээлбэл манай нэгдүгээр жишээн дээр 13=(1, 1,0,1) хүүтэй хэсгийг сонгож үүнээс 2 хүүг авч 11= =(1,0,1,1) хүүтэй болгож болно. Энэ тухайн тохиолдолд бусад хоёр хэсэг бүрээс хэд хэдэн хүү авч 12 гэсэн тоог 10=(1,0,1,0)-аар юмуу 7-г 1=(0,0,1)-ээр сольж болно.

Хэрэв A_1^* нь A_2^*-ийг тэг байрлалд оруулбал A_2^* юу хийлээ ч гэсэн A_1^*-г тэр дахин тохирох байрлалд эргүүлж оруулна. Үнэндээ A_2^* хэдэн хүүг авсан ч гурван тооны аль нэгний нь ядаж нэг цифрийг өөрчилнө. Ийм учраас оронгоор нэмсэн нийлбэрийн харгалзсан цифр өөрчлөгдөнө. Хэрэв A_1^* нь A_2^*-г бүх хэсгүүдэд хоосон болох хамгийн бага тэг байрлалд оруулбал тоглоом төгсөнө. Энэ тоглоом нэгдүгээр жишээнд авч үзсэн тоглоомтой аль нэг талаар төсөөтэй нь харагдаж байна.

Энд хэрэглэсэн аргыг гурваас илүү хэсэг бүхий тохиолдолд хэрэглэж болох нь илэрхий. «Ним» тоглоомыг авч үзэхдээ бид хоосон байрлалаас эхлэн гэдрэг явж хожлын бүх байрлалуудыг тодорхойлоогүй гэдгийг тэмдэглээ. Ингэж хийж болох байсан нь мэдээж бөгөөд энэ нь бас л өмнөх дүгнэлтэд хүргэх байсан билээ. Гэвч мэдэгдэж байгаа шийдүүдийг ашиглан өмнөх үр дүнгийн үнэн зөвийг шалгах нь хялбар юм.

Д а с г а л

1. Өөрийнхөө нэг найзтай „ним“ тоглоомоор тогло.

2. „ним“ тоглоомын хожлын ба хожигдлын $B_1(A_1)$, $B_2(A_1)$ $\Pi_1(A_2)$, $\Pi_2(A_2)$ **олонлогуудыг тодорхойл.**

3. Дараахь тоглоомыг авч үз. Хоёр бөөн чүдэнзнээс тоглогчид нэг хэсгээс нь нэгийг юмуу эсвэл хэсэг тус бүрээс нэг нэгийг авна. Хэн хамгийн сүүлийн чүдэнз авна тэр хүи хожно.
$B_1(A_1)$, $B_2(A_1)$ $\Pi_1(A_2)$, $\Pi_2(A_2)$**-олонлогуудыг ол. Хожлын байрлалуудыг тодорхойлох ерөнхий дүрмийг та нар зааж чадах уу.**

3§. Спортын тоймчийн гаж буруу санал

Хөл бөмбөгийн тоглолтын үе дууссаны дараа тоглолтын үед болсон хэрэг явдал тоглогчид ба багуудын онцлогийн тухай дахин дахин хуучиртал нь шүүн ярилцдаг, хамгийн хүчтэй баг нь үнэн хэрэг дээрээ «гараа өргө» (Г) гэдэг гойд сайн баг биш харин «биднийг өрөвд» (*Б*) гэдэг спортын гунигт баг байсан юм гэж өөрийн уншигчдад итгүүлэхийг хүссэн арга мэхтэй сэтгүүлч бас байдаг л юм. Үүнийгээ батлахын тулд *Б* нь *А*-г хожсон, *А* нь *В*-г хожсон гэх мэтээр тоглолтуудын дарааллыг *Г* хамгийн эцэст нь орсон байх хүртэл нь дурдах юм. Ямар нөхцөлд тийм чиглэлт энгийн гинжийг үнэндээ олж болохыг харахын тулд

$$A_1\ A_2, \ldots, A_n \qquad (1)$$

гэсэн n баг юмуу тоглогчид нэг бүр нь бусад үлдсэнтэйгээ тоглосон тохиолдлыг авч үзье. Хялбарыг бодож эдгээр тоглолтын аль нь ч тэнцээгээр дуусаагүй юм гэж үзье. Тэгвэл энэ тохиолдолд харгалзах граф нь бүрэн граф (1 бүлэг, 2§-ийг үз), өөрөөр хэлбэл, түүний аль ч хоёр орой нь хоорондоо ямар нэг чиглэлт ирмэгээр холбогдсон граф байна. Манай эхний дүгнэлт нь доорх зүйл болно.

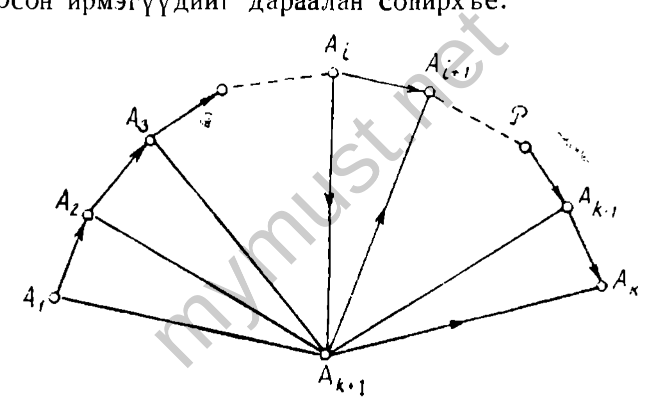
Теорем 1. *Чиглэлт бүрэн графад түүний бүх оройг дайрч гарсан чиглэлт энгийн гинж ямагт олдоно.*

Баталгаа. Хэрэв (1) оройнуудын зөвхөн зарим нэгүүдийг дайрсан чиглэлт энгийн

$$P = (A_1 A_2),\ (A_2 A_3),\ .\ .\ .\ ,\ (A_{k-1},\ A_k) \qquad (2)$$

гинж байвал түүнээс нэг оройгоор илүү энгийн чиглэлт гинжийг ямагт олж болно гэж харуулбал хүрэлцээтэй. Иймд P-д дурын A_{k+1} оройг нэмэн A_{k+1} оройг P-ийн оройнуудтай холбосон ирмэгүүдийн элдэв бололцоот чиглэлүүдийг авч үзье.

Хэрэв A_k -аас A_{k+1} тийш явсан ирмэг байвал P-ийг A_{k+1} хүртэл шууд үргэлжлүүлж болно. Ийм учраас (A_{k+1}, A_k) ирмэг нь A_{k+1}-ээс чиглэсэн (76 дугаар зураг) юм гэж авч үзье. A_{k+1}-ийг A_{k-1}, A_{k-2}, . . . , A_1-тэй холбосон ирмэгүүдийг дараалан сонирхъё.



76 дугаар зураг

Эдгээрийн ядаж нэг нь A_{k+1} руу чиглэсэн ба ($A_i A_{k+1}$) нь (A_{k+1}, A_{k-1}, (A_{k+1}), A_{k-2},) . . . , (A_{k+1}, A_{l+1}) (A_l A_{k+1}, дарааллын эхний тийм ирмэг нь байна гэж үзье. Тэгвэл

$$(A_l,\ A_{k+1}),\ (A_{k+1},\ A_{l+1}) \qquad (3)$$

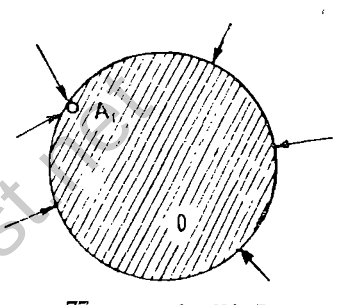
гэсэн зэрэгцээ хос ирмэгүүдийг авахад нэгдүгээр нь A_l-ээс A_{k+1} руу харин хоёрдугаар нь A_{k+1}-ээс A_{l+1} рүү чиглэсэн байна. Энэ нь

$$A_1,\ .\ .\ .\ ,\ A_l,\ A_{k+1},\ A_{l+1},\ .\ .\ .\ ,\ A_k$$

чиглэлт энгийн гинжийг өгнө.

Бүх ирмэгүүд нь A_{k+1}-ээс P рүү чиглэсэн байх тохиолдлыг авч үзэх л үлдлээ. Энэ тохиолдолд эгэл гинжийг (A_{k+1}, A_1) ирмэгээр эхэлж түүнийг P-гээр үргэлжлүүлж болно. Энэ нь гинжийн эхний оройг өөрчлөх шаардлагатай ганц тохиолдол юм гэдгийг тэмдэглэе.

Тэмцээн дууссаны дараа эсрэг тоглогчдыг ялагчдын чиглэлт гинжид ямагт байрлуулж болдгийг энэ үр дүн харуулж байна. Спортын тоймчийн гаж буруу саналын тухай бидний ярьсан зүйлийг энэ теорем бүрэн төгс тайлбарлаж чадахгүй юм. Ямар нэг бэхлэгдсэн A_1 орой авч түүнээс эхлэн бусад бүх оройг дайрсан чиглэлт гинж татахыг тэнд шаардсан билээ. P гинжийг үргэлжлүүлэхдээ зарим үед түүний эхний оройг солих шаардлага бидэнд тохиолдсон байж болохоор өмнөх баталгаанаас дээрх гинжийг байгуулж болно гэдгийг мөрдөн гарахгүй юм. Үнэндээ тийм гинжийг тэр болгон байгуулж болдоггүй. Жишээлбэл A_1 нь «цохигдсон» баг өөрөө хэлбэл тэмцээний бүх тоглолтод хожигдсон бол тийм гинж байхгүй нь илт юм.



77 дугаар зураг

Зөвхөн өөр хоорондоо өрсөлдсөн, энэ бүлгийн аль ч баг нь энэ бүлэгт ороогүй эсрэг тоглогчийгоо хожиж чадаагүй багууд буюу «цохигдсон бүлэг» 0-д A_1 баг орж байх ерөнхий тохиолдолд A_1-ээс тийм гинжийг байгуулж чадаагүй. Харгалзах граф (77 дугаар зураг) дээр зөвхөн 0 руу чиглэсэн ирмэгүүд байх ба харин ганц ирмэг 0-оос чиглээгүй байна. Гэвч дараахь теорем хүчинтэй.

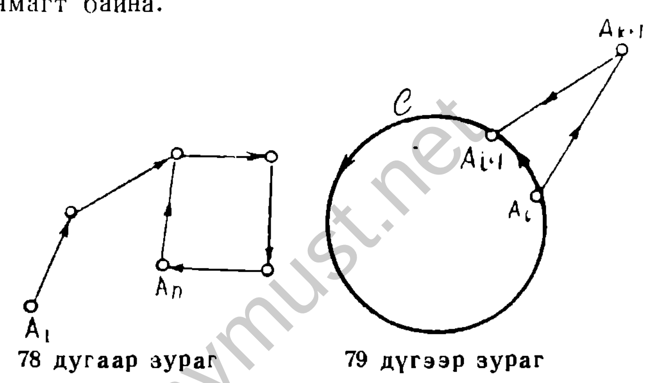
Теорем 2. *Хэрэв A_1 нь аль ч «цохигдсон бүлэг»-т ороогүй бол A_1-ээс эхэлсэн бөгөөд графын бүх оройг дайрсан чиглэлт гинж ямагт олдоно.*

Баталгаа. Бид (2)-той адилаар энгийн P гинжийг A_1-ээс эхлэн байгуулж түүнийг боломжийн хирээр аль болох хол үргэлжлүүлье. P-гээс чиглэлт ирмэг ирсэн дурын A_{k+1} орой хүртэл нь P гинжийг түүний эхний A_1 оройг өөрчлөхгүйгээр үргэлжлүүлж болох нь теорем1-ийн баталгаанаас харагдаж байна. Ингэхлээр P гинжийг үр-

гэлжлүүлж болохгүй тохиолдолд түүний оройнууд нь «цохигдсон бүлэг» үүсгэнэ. Нөгөө талаар нөхцөл ёсоор A_1 ямар ч тийм бүлэгт хамаарахгүй тул P гинж нь графын бүх оройг дайрч гарах ёстой болно. Үнэндээ дараахь дүгнэлт мөн хүчинтэй байна.

Теорем III. *«Цохигдсон бүлгүүд» агуулаагүй чиглэлт бүрэн графад түүний бүх оройг дайрч гарсан чиглэлт цикл байна.*

Баталгаа. Хэрэв P нь графын бүх оройг дайрсан энгийн гинж ба A_n нь түүний төгсгөлийн цэг бол нэгэнт A_n нь «цохигдсон баг» биш учраас A_n-оос гарсан ирмэгүүд ямагт байна.



78 дугаар зураг   79 дүгээр зураг

Тийм (A_n, A_l) ирмэг нь P дээрх ямар нэг A_l оройд очих учир энэ нь чиглэлт ямар нэг циклийг үүсгэнэ (78 дугаар зураг).

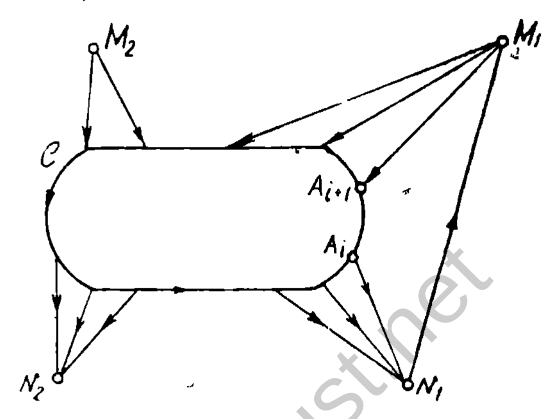
Тийм чиглэлт

$$C = (A_1 A_2), \ldots (A_{k-1}, A_k,), \ (A_k, \ A_1)$$

цикл нь графын бүх оройг агуулаагүй ба A_{k+1} нь C ба A_{k+1}-ийн хооронд хоёр чиглэлд нь ирмэг байдаг тийм орой юм гэж саная. Тэгвэл 79 дүгээр зураг дээрх шиг A_{k+1}-ийг C-тэй холбосон бөгөөд эсрэг чиглэсэн зэрэгцээ ирмэгүүд олдоно. Энэ тохиолдолд (A_l, A_{l+1}) ирмэгийг (A_l, A_{k+1}) (A_{k+1}, A_{l+1})-ирмэгүүдээр сольж C-г өргөтгөж болно (79 дүгээр зураг).

C-д хамаарагдахгүй оройнууд нь бүх ирмэг нь C-рүү чиглэсэн M оройнууд ба бүх ирмэгүүд нь C-гээс чиглэсэн N оройнууд гэсэн хоёр ангид хуваагдсан тохиолдлыг авч үзэх үлдлээ. Тэгэхдээ энэ хоёр төрлийн оройнууд

нэг зэрэг оршин байх ёстой юм. Учир нь хэрэв M оройнууд байхгүй бол N оройнуудын $\{N\}$ олонлог нь «цохигдсон бүлэг» үүсгэх ба харин хэрэв N оройнууд байхгүй бол C-гийн оройнууд тийм бүлгийг үүсгэнэ (80 дугаар зураг).



80 дугаар зураг

$\{M\}$ олонлогийн оройнууд нь $\{N\}$-ийн оройнуудтай ирмэгүүдээрээ холбогдоно. Тодорхой хэлбэл $\{N\}$ олонлогийн ямар нэг N_1 оройгоос $\{M\}$ олонлогийн ямар нэг M_1 орой руу чиглэсэн (N_1, M_1) ирмэг ядаж нэг олдох ёстой болно. Учир нь ийм байхгүй юм гэж үзвэл $\{N\}$ нь «цохигдсон бүлэг» болоход хүрнэ. Харин тэгвэл $(A_i\ A_{i+1})$ ирмэгийг $(A_i, N_1,)$, (N_1, M_2), (M_1, A_{i+1}) гурван ирмэгээр сольж C-г бас л өргөтгөж болно. Иймд C-д графын бүх орой орж иртэл нь түүнийг алхам алхмаар өргөтгөж болно.

Дасгал

1. Шатрын ямар нэг тойрог тэмцээний дүнгийн хүснэгтийг авч үзэж түүнд харгалзсан графын бүх оройг дайрсан чиглэлт эгэл гинжийг ол. Ямар нэг „цохигдсон бүлэг" байна уу, үгүй юу гэдгийг тогтоо. Хэрэв тийм бүлэг байхгүй бол графын бүх оройг дайрсан чиглэлт циклийг олохыг хичээ.

2. Тэнцээнүүд байж болкоо гэж үзвэл өмнөх дүгнэлтүүд яаж өөрчлөгдөх вэ?

VII БҮЛЭГ

ХАРЬЦАА

1§. Харьцаа ба граф

Бид энэ хүртэл графыг өдөр тутмын амьдралд тохиолддог болон ухаан сорих[1] бодлогууд ба тоглоомуудад хэрэглэх тухай буюу графын «практик» хэрэглээний талаар авч үзлээ. Бид энд материалыг нийтийн мэддэг хялбар ойлголтуудтай холбоотой байхаар эмхтгэн цуглуулсан билээ. Энэ бүлэгт граф нь математикийн зарим нэг үндсэн ойлголтуудтай нягт холбоотой ба чухамдаа тэр нь энэ ойлголтуудыг тоймлох өөр нэг арга юм гэдгийг үзүүлэхийг хичээе.

Математикийн систем бүхэн ямар нэг объектууд буюу элементүүдийн олонлогтой холбогддог. Жишээлбэл тийм элементүүд нь ямар нэг байдлаар ерөнхий чанартай тоонууд байж болно. Тухайлахад бид (эерэг бүхэл) натурал, эерэг, рациональ, бодит комплекс тоонуудын олонлогуудыг авч үзэж болно. Алгебрт бид нэмж, хасаж, үржүүлэх мэтчлэн үйлдэл хийж болдог элементүүдтэй тохиолддог. Геометрт тодорхой цэгүүдийн олонлог юмуу шулуун, тойрог, хавтгай гэх мэт онцгой дүрсийн цэгүүдийн олонлогуудыг авч үздэг. Логикт янз бүрийн хэллэгүүдийн чанаруудыг судалдаг.

Математикийн онолыг байгуулахад бидэнд эдгээр элементүүд хэрэгтэй төдийгүй мөн тэдний хоорондын харьцаа хэрэгтэй болдог. Зарим нэг жишээ дурдъя: Тоонуудын хувьд тэнцэл гэдэг ойлголт: $a=b$ утга учиртай байдаг. Хэрэв a ба b тоонууд ялгаатай бол $a\neq b$ гэж бид бичдэг. $a\geqslant b$ бичлэг нь a нь b-гээс их, эсвэл a-нь b-тэй тэнцүү гэсэн үг юм. Хэрэв a ба b нь бүхэл тоонууд ба a нь b-д хуваагдвал (бүхэл) a/b гэж бичнэ.

Геометрт хоёр дүрс, жишээлбэл, хоёр гурвалжин хоорондоо тэнцүү[1] (энэ харьцааг $A=B$ гэж бичдэг) юмуу нэг дүрс нь (B) нөгөөг (A) дотроо агуулсан энэ тохиолдолд $A\subset B$ гэж бичдэг. Хоёр шулуун нь параллель ($A \parallel B$) юмуу харилцан перпендикуляр (тэгш өнцгөөр огтлолцсон, $A \perp B$) байж болно. Логикт нэг хэллэг юмуу өгүүлбэр нь нөгөөгөөс мөрдөн гарч ($A \Rightarrow B$) болно. Олонлогийн онолд a элемент ба олонлог S-ийн хоорондын харьцаа $a \in S$ нь элемент a олонлог S-д харьяалагдана (хамаарна) гэдгийг тэмдэглэнэ.

Эдгээр бүх харьцаанууд нь хоёр объектод холбогдох учраас эдгээрийг ихэвчлэн ***бинар харьцаа*** гэж нэрлэх боловч ***харьцаа*** гэж товчлон ярьдаг. Өөр маягийн харьцаанууд ч тохиолдоно. Жишээлбэл: гурван объектод холбогдох харьцааг гурвалсан харьцаа гэж нэрлэнэ. A цэг нь B ба C цэгүүдийн хооронд оршино гэсэн харьцаа нь ийм харьцааны жишээ юм.

Харьцаа гэдэг ойлголт математикт чухал учраас түүнд ерөнхий тодорхойлолт өгөх шаардлагатай юм. Ерөнхий (бинар) харьцааг R тэмдгээр тэмдэглэн

$$a\ R\ b \qquad (1)$$

гэж бичээд b нь a-тайгаа R харьцаанд оршиж байна гэж бид ярина. Энэ нь a бүрийн хувьд энэ харьцаагаар тодорхойлогдсон ямар нэг тусгай R_a олонлогт b харьяалагдана гэсэн үг юм. Жишээлбэл $a > b$ харьцаа нь a-гаас бага бүх тооны олонлогт b харьяалагдана гэсэн үг юм. a ба b бүхэл тоонуудын хувьд $a \mid b$ харьцаа буюу a нь b-гийн хуваагч гэсэн харьцаа нь a-гийн бүхэл давталт болдог тийм бүх бүхэл тоонуудын олонлогт харьяалагдана гэсэн үг юм. Ингэхлээр (1) бичлэг a элементэд R харьцаа харгалзуулж байгаа R_a олонлогт b харьяалагдана гэдгийг л илэрхийлж байгаа өөр нэг арга юм.

Одоо графдаа эргэж оръё. Үнэндээ чиглэлт граф G бүхэн өөрийнхөө оройнуудын олонлогт ямар нэг харьцааг тодорхойлно.
Энэ харьцааг

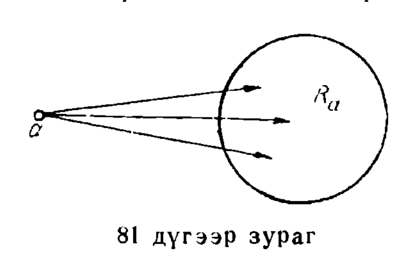
$$a\,G\,b \qquad (2)$$

хэлбэртэй бичиж болно. Энэ нь G граф дээр a-гаас b руу очсон ирмэг байна гэсэн үг юм. Харгалзах $R_a = G_a$ олонлог G графын a оройгоос нь ирмэгүүд очдог тийм бүх

[1] конгруэнт гэсэн үг (хэв.ред)

гэж хэлэх нь (2) харьцаа байна гэсэнтэй адил юм.

Энэ нь графын онолыг харьцааны онолын ямар нэг тусгай хэсэг нь юм гэж үзэх бодлыг бидэнд төрүүлж болох юм. Үнэн хэрэг дээрээ энэ хоёр онол нь ямар нэг утгаараа адил чанартай юм. S олонлогийн a элемент бүрд ямар нэг R_a олонлогийг харгалзуулдаг ямар нэг R харьцаа S олонлог дээр тодорхойлогдсон юм гэж саная: Тэгвэл a оройгоос R_a -ийн орой бүрд ирмэг татаж R харьцааны G графыг байгуулж болно (81 дүгээр зураг).



81 дүгээр зураг

Иймд харьцааны онол ба графын онол нь зөвхөн хандлагаараа л ялгагдахаас биш харин агуулгаараа ялгаагүй юм. Тэгвэл математикт эдгээр онолыг яагаад тус тусад нь авч үздэг юм бэ?

Аналитик геометрт шулуун шугам гэж ярьдаг байхад мөн түүнийг алгебрт хоёр үл мэдэгдэхтэй тэгшитгэл гэж үздэг шиг тийм дадал ба заншлаар энэ нь нэг талаас тайлбарлагдана. Нөгөө талаас чухамдаа энэ хоёр онол аргуудынхаа талаар бага зэрэг ялгаатай юм. Энэ нь харьцааны онол голчлон төгсгөлгүй R_a олонлогуудтай холбогддогт оршино. Энд бодит тооны олонлогийн $a>b$ харьцааг жишээ болгон дурдаж болно.

Харгалзах граф нь төгсгөлгүй олон оройтой, орой бүрд нь төгсгөлгүй олон ирмэг байх ёстой болно. Ийм графуудыг судлахад манай геометрийн зөн билэг нь бидэнд бараг тус болохгүй. Бид графын онолын зарим асуудлыг урьд өмнө авч үзэхдээ графыг төгсгөлт тооны оройнууд ба тэднийг холбосон ирмэгүүдийн олонлог гэж ил тод дүрсэлж байсан нь байдлыг их л хөнгөвчилдөг байсан. Гэвч олон төрлийн харьцаануудын хувьд өмнөх сэтгэлгээнүүд нь үнэмшлээ алддаг төдийгүй заримдаа тэдгээр нь төгсгөлгүй олон орой ба ирмэгтэй графын хувьд буруу зүйлд ч хүргэдэг учир ямартай ч энд цоо шинэ баталгаануудыг гаргах шаардлагатай байдаг.

Дасгал

1. Дээр дурдсан харьцаануудаас ялгаатай ямар нэг харьцаануудын жишээ гарга. Ямар нэг шинэ жишээнүүдийг бие дааж зохиохыг оролд.

2. 2,3,4,5,6 тоонуудын олонлогуудын хувьд доорх харьцаа тус бүрийн графыг зурж R_x олонлогийг тодорхойл. Үүнд

а) $x > y$, б) $x \neq y$ в) x/y

2§. Тусгай нөхцөлүүд

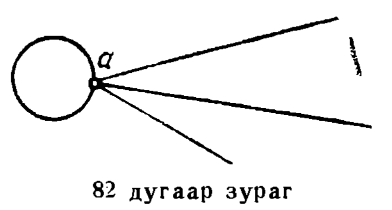
Ер шинэ санаанууд нь шинэ дүгнэлтэд хүргэдэг билээ. Графын ба харьцааны онолуудын параллелизм[1] байдлыг улам тодруулахын тулд бид графын онолд харьцааны онолын зарим нэг үндсэн санаануудыг оруулах хэрэгтэй юм.

Ямар нэг R харьцаа өгсөн байг. Ямар нэг a элемент өөрөө өөртэйгээ энэ харьцаанд оршиж байх явдал байж болно.

$$a\ R\ a \qquad (3)$$

Жишээлбэл A шулуун бүрийг өөрийг нь өөртэй нь параллель гэж тооцдог: $A \| A^1$; а тоо бүхэн $a \geqslant a$ нөхцөлд тохирдог гэх мэтчлэн. Бид өдий болтол графууд дээр ийм байдлуудыг тусгаагүй билээ. Энэ байдалд төгсгөлийн цэгүүд нь давхацсан (a,a) ирмэг харгалзах ёстой. Тийм ирмэгийг ***гогцоо*** гэж нэрлэдэг (82 дугаар зураг).

Дурын a-гийн хувьд (3) нөхцөл биелэгддэг R харьцааг ***рефлексив харьцаа*** гэж нэрлэдэг. Харгалзсан графын нь орой бүр гогцоотой байна. Дээр дурдсан параллелийн $A \| B$ болон тоонуудын $a \geqslant b$ харьцаанууд нь рефлексив харьцаануудын жишээ юм. Хэрэв (3) нөхцөл ганц ч элементийн хувьд биелэхгүй бол R харьцааг ***эсрэг рефлексив харьцаа*** гэж нэрлэдэг. Харгалзах графын ганц ч оройд нь гогцоо байхгүй. Тийм харьцааны жишээ нь шулуунуудын перпендикулярын $A \perp B$ харьцаа юм.



82 дугаар зураг

$$a\ R\ b \text{ байхад л } b\ R^*\ a$$

байна гэж тооцож R харьцаа бүрд урвуу R^* харьцааг тодорхойлж болно. Жишээлбэл a/b харьцаа буюу a нь

[1] Хоёр онолын хоорондох параллелизм нь (зэрэгцээ чанарууд) гэдэг нь хоёуланд нь биелэгддэг тэсөөтэй бүх ойлголт болон чанаруудыг ойлгодог юм) (Ред. санамж)

b-гийн хуваагч гэсэн харьцааны урвуу харьцаа R^*: b нь a-гийн давталт $b\,|^*\,a$ гэсэн харьцаа юм. Заримдаа R^* харьцааг тусгай тэмдгээр тэмдэглэдэг. Жишээлбэл a нь b-гээс их, $a>b$ харьцааны урвуу нь $b<a$ буюу b нь a-гаас бага; a нь A олонлогийн элемент $a\in A$ харьцааны урвуу нь A нь a-г агуулна. $A\ni a$ гэсэн харьцаа юм.

Урвуу харьцааны тодорхойлолтоос үзвэл хэрэв R харьцаанд харгалзсан G граф дээр (a,b) ирмэг байвал R^* харьцаанд харгалзсан G^* граф дээр (b,a) ирмэг байх ёстой байна. Өөрөөр хэлбэл G^* нь G графтай ижил ирмэгүүдтэй боловч чиглэл нь эсрэг байна. Өөрөөр хэлбэл G^* нь G-ийн урвуу граф юм. Зарим нэг a ба b хос элементүүд нь зарим нэг R харьцааны хувьд нэг зэрэг байж

$$a\,R\,b \text{ ба } b\,R\,a \qquad (4)$$

болно. Харгалзсан граф дээр (a,b) ба (b,a) гэсэн эсрэг чиглэсэн хоёр ирмэг байх ёстой. Хоёр чиглэлийн хөдөлгөөнтэй гудамжийг дүрсэлдэг шигээр энэ хос ирмэгийг чиглэлгүй нэг ирмэгээр сольж болно.

Зарим нэг харьцааны хувьд хоёр нөхцөлийн нэгээс нь нөгөө нь мөрдөн гардаг. Тийм харьцаа тэгш ***хэмт харьцаа*** гэж нэрлэдэг. Параллелийн харьцаа $A\|B$, перпендикулярын харьцаа $A\perp B$ болон тэнцлийн $A=B$ харьцаанууд нь ийм харьцаанууд юм. Саяын хийсэн тайлбаруудын үндсэн дээр доорх дүгнэлтүүдийг хийж болно.

Тэгш хэмт харьцаанд чиглэлгүй ирмэгүүдтэй граф харгалзах ба урвууд чиглэлгүй ирмэгүүдтэй граф нь ямар нэг тэгш хэмт харьцааг тодорхойлно гэж хэлж болно.

(4) нөхцөлүүдийн нэг нь биелэгддэгээс нөгөө нь биелэгдэхгүй нь мөрдөн гардаг тийм харьцаанууд ч байдаг. Тийм харьцааг ***эсрэг тэгш хэмт харьцаа*** гэж нэрлэдэг. Тэдэнд харгалзах графууд нэг ижил хос оройнуудыг холбосон чиглэлгүй юмуу эсрэг чиглэсэн ирмэгүүд байхгүйгээс гадна ганц ч оройд нь гогцоо байхгүй өөрөөр хэлбэл энэ харьцаанууд нь эсрэг рефлексив харьцаанууд байна.

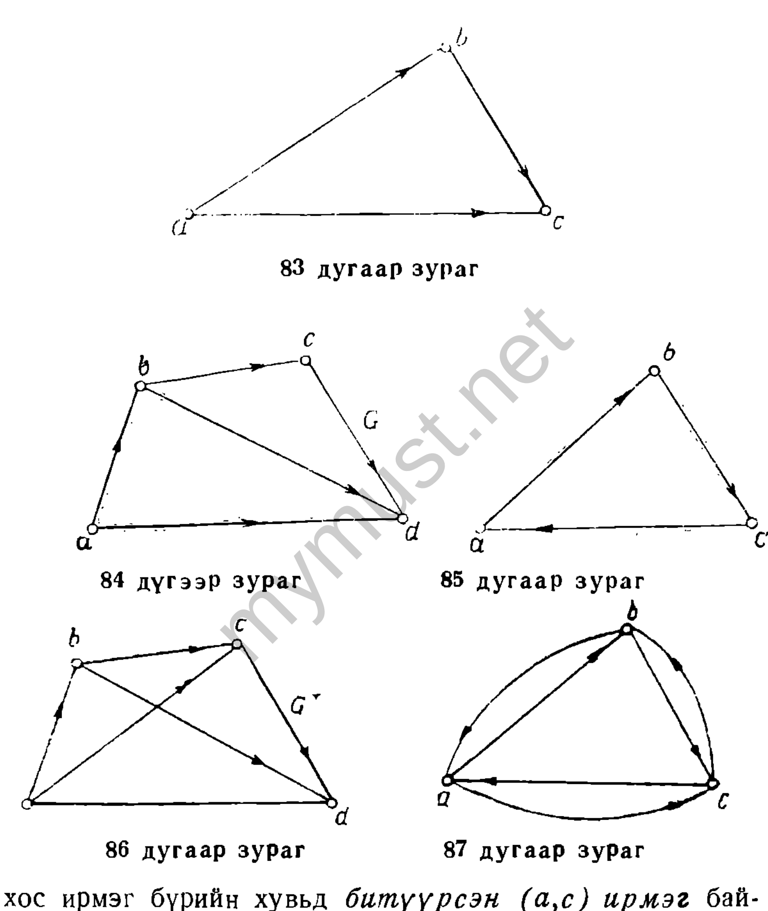
Харьцааны онолд чухал үүрэг гүйцэтгэдэг бас нэг чанар байдаг. Хэрэв $a\,R\,b$ ба $b\,R\,c$ хоёр нөхцөлөөс $a\,R\,c$ байх нь мөрдөн гардаг бол R харьцааг транзитив (дамжих чанартай) харьцаа гэж ярьдаг.

Параллелийн харьцаа $A\parallel B$, тэнцлийн $A=B$ харьцаа, a нь b-гээс их гэсэн $a>b$ харьцаа, a нь b-гийн хуваагч гэсэн $a\,|\,b$ харьцаанууд нь транзитив харьцаануудын жи-

шээ болно. Нөгөө талаас $A \perp B$ ба $a \neq b$ харьцаанууд нь транзитив биш харьцаанууд юм.

Транзитив харьцааны графууд нь

$$(a,b),\ (b,c) \qquad (5)$$



83 дугаар зураг

84 дүгээр зураг

85 дугаар зураг

86 дугаар зураг

87 дугаар зураг

хос ирмэг бүрийн хувьд *битүүрсэн* (a,c) *ирмэг* байдаг ийм онцлог чанартай юм (83 дугаар зураг). Тийм графад x оройгоос өөр y орой очсон чиглэлт гинж байвал дээрх чанарыг давтан хэрэглэж мөн (x,y) ирмэг байна гэсэн дүгнэлт хийж болно.

Эцэст нь чиглэлт ирмэгүүдтэй транзитив биш G граф байж гэж саная. Жишээлбэл 84 дүгээр зураг дээрх гра-

фад a ба c оройнуудын хооронд ирмэг байхгүй, харин 85 дугаар зураг дээрх графад (c,a) ирмэгийн зэрэгцээ (a,b) ба (b,c) ирмэгүүдийн битүүрүүлэгч (a,c) ирмэг байх ёстой билээ. Тохиолдол бүрд чиглэлт G графын дараалсан хос ирмэг бүр битүүлсэн ирмэгтэй болтол нь түүнд чиглэлт ирмэгүүдийг нэмж транзитив граф болгон хувиргаж болно. Ингэж гаргасан шинэ $G^{т}$ графыг G графын транзитив битүүлэлт гэж нэрлэдэг. 86 ба 87 дугаар зургууд дээр 84 ба 85 дугаар зургууд дээр графуудад харгалзах транзитив битүүлэлтүүдийг үзүүлжээ. 85 дугаар зураг дээр дээрх графад (a,b) ба (b,c)-г битүүлэгч (a,c) ирмэг, (c,a), ба (a,b)-г битүүлэг (c,b) ирмэг, (b,c) ба (c,a)-г битүүлэгч (b,a) ирмэгийг нэмэхэд гарсан транзитив битүүрэлт нь ямар нэг тэгш хэмт харьцааны граф болсон байна гэдгийг тэмдэглэе.

Дасгал

1. Дээр дурдсан чанаруудтай өөр харьцаануудын жишээ гарга

2. Гэр бүлийн харьцаачуудыг авч үзье. Үүнд:

а) А нь В-гийн удам байх

б) А ба В нь ерөнхий өвөг дээдэстэй байх харьцаачуудыг авч үз.

3. 49 ба 50 дугаар зураг дээрх графуудын транзитив битүүлэлтүүдийг байгуул.

3§. Эквивалентийн харьцаа

Олон төрлийн харьцаануудаас эквивалентийн харьцаанууд нь онцгой чухал үүрэгтэй байдаг. Эквивалентийн харьцааг $\sim$ тэмдгээр тэмдэглэдэг заншилтай, тэр харьцаа нь

1. *Рефлексив чанар:* $a \sim a$
2. *Тэгш хэмт чанар:* $a \sim b$-гээс $b \sim a$ байх нь мөрдөн гардаг.
3. *Транзитив чанар:* $a \sim b$ ба $b \sim c$-гээс $a \sim c$ байх нь мөрдөн гарна гэсэн тийм гурван чанараар тодорхойлогдоно.

Хамгийн түрүүнд санаанд буух жишээ нь тэнцлийн $a=b$ харьцаа юм. Чухамдаа эквивалентийн харьцаа нь тэнцэлтэй төстэй чанаруудтай байдаг ба олонхи тохиолдолд эквивалент чанарыг нэг маягийн тэнцэл гэж үзэж болдог. Үүний тод нэг жишээ нь геометрийн дүрсүү-

дийн конгруэнт чанар юм. Энэ чанарыг ихэнхдээ тэнцүү чанар гэж нэрлэдэг нь дэмий хэрэг биш юм.

Тооны онолд жишигдэх чанар гэж нэрлэгддэг эквивалентийн өөр нэг харьцааг хэрэглэдэг. Хэрэв a, b, m нь гурван бүхэл тоо бол

$$a \equiv b \pmod m \qquad (6)$$

бичлэг нь $a-b$ ялгавар m-д хуваагдана гэсэн үг юмуу өөр үгээр хэлбэл ямар нэг бүхэл κ-ийн хувьд

$$a = b + \kappa m \qquad (7)$$

байна гэсэн үг юм. a тоо b-тэй модуль m-ээр жишигдэнэ гэж тооны онолд (6) харьцааг үгээр илэрхийлдэг. Жишээ болгон

$$11 \equiv 2 \pmod 3$$
$$-7 \equiv 19 \pmod{13}$$

жишлэгүүдийг дурдъя. Өөр нэг томьёогоор тэмдэглэгддэг тохиолдлуудыг ч бичлэгийг нийтлэг байлгахын тулд (6)-г хэрэглэн бичдэг. Жишээлбэл

$$b \equiv 0 \pmod 2), \qquad c \equiv 1 \pmod 2)$$

гэсэн жишлэгүүд харгалзан b нь тэгш c нь сондгой тоо гэсэн үг юм. Үүний адилаар

$$a \equiv o \pmod m$$

гэдэг нь a тоо m-д хуваагдана гэсэн үг юм.

Тоонуудын жишлэгийн (6) харьцаа нь эквивалентийн харьцааны гурван нөхцөлийг хангана гэдгийг хялбар баталж болно.

1. $a = a + o \cdot m$ байх учир $a \equiv a \pmod m$ байна.

2 хэрэв $a \equiv b \pmod m$ бол (7) ёсоор $a = b + km$ байх учраас $b = a + (-k)m$ болох ба иймд $b \equiv a \pmod m$ байна.

3. Хэрэв $a \equiv b \pmod m$ ба $b \equiv c \pmod m$ бол (7) томьёо ёсоор

$a = b + km$, $b = c + bm$ ба иймд учраас

$a = c + lm + km = c + (l + k)m$ буюу

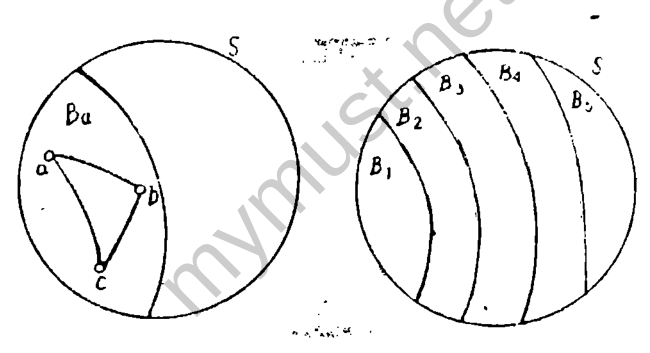
$$a \equiv c \pmod m \qquad \text{байна.}$$

$m = o$ үед (6) жишлэг нь (7) нөхцөл ёсоор ерийн тэнцэл болж хувирна.

Эквивалентийн харьцааг өөр аргаар тайлбарлаж болохыг бид одоо үзүүлье. Эквивалентийн харьцаа нь ямар

нэг S олонлогийн элементүүдийн хувьд тодорхойлогддог ба S-ийн хоёр элемент нэг бол хоорондоо эквивалент нэг бол эквивалент биш байдгийг юуны өмнө тэмдэглээ. Жишээлэхэд (6) жишлэгийг бүх бүхэл тооны S олонлог дээр авч үздэг. Параллелийн харьцаа $A \parallel B$ нь хавтгайн бүх шулуунуудын олонлог дээр юмуу огторгуйн бүх шулуунуудын олонлог дээр тодорхойлогдсон эквивалентийн харьцаа юм.

Ямар нэг S олонлогийн элементүүдийн хувьд ямар нэг эквивалентийн харьцаа $a \sim b$ тодорхойлогдсон юм гэж саная. a-тай эквивалент бүх b элементүүдийг авч үзье. Тэдгээр нь S-ийн хэсэг B_a олонлогийг үүсгэнэ. Ийм B_a олонлогууд нь ерөнхий хэлбэрийн харьцаануудын хувьд дээр тодорхойлсон R_a олонлогуудад харгалзах боловч бид энэ тохиолдолд эдгээрийг, авч үзэж буй эквивалентийн харьцаанд харгалзах ***эквивалентийн ангиуд*** гэж нэрлэж байя.



88 дугаар зураг **89 дүгээр зураг**

Эдгээр ангиуд ямар чанартай вэ? Нэгэнт эквивалентийн харьцаа нь рефлексив, $a \sim a$ учир a элементийн B_a анги нь a элементээ агуулна. Одоо b элемент нь B_a ангид хамаардаг. Өөрөөр хэлбэл $a \sim b$, c элемент нь b элементийн $B_в$ ангид хамаардаг буюу $b \sim c$ (88 дугаар зураг) байж гэж бодъё. Эквивалентийн харьцаа транзитив байдгийг анхаарвал эндээс $a \sim c$ байх мөрдлөг гарна. Өөрөөр хэлбэл c нь B_a ангид орно. Энэ нь эквивалентийн $B_в$ анги бүхлээрээ B_a -д агуулагдана гэсэн үг юм. Нөгөө талаас хэрэв $a \sim b$ бол $b \sim a$ (эквивалентийн харьцаа тэгш хэмтэй учир) тул B_a нь $B_в$ -д агуулагдана. Иймд хэрэв $a \sim b$ бол $B_a = B_в$ байна.

Одоо S олонлогийн хоорондоо эквивалент a ба b элемент авч үзье. Эквивалент биш гэдгийг $a \sim b$ гэж тэмдэглэе. Энэ тохиолдолд B_a ба B_b ангиуд нь огтлолцохгүй. Өөрөөр хэлбэл ерөнхий элементгүй байна. Үнэндээ хэрэв ямар нэг c элемент нэгэн зэрэг B_a ба B_b -д хамаардаг бол байх ба тэгвэл $a \sim b$ болж авч үзсэнтэй зөрчилдөнө. $a \sim c$ ба $b \sim c$

Элемент бүр нь нэг л ангид хамаарах учир бүх S олонлог нь үл огтлолцох эквивалентийн ангиудад хуваагдана (89 дүгээр зураг). Тийм анги бүр нь бие биетэйгээ эквивалент бүх элементүүдээс тогтоно.

Хавтгайн дээрх бүх шулуунуудын олонлог S ба $A \parallel B$ харьцааг жишээ болгон авч үзье. Энд анги тус бүр нь нэг ижил *чиглэлтэй* бүх шулуунуудаас тогтоно. Бас нэг жишээ авч үзье. Тооны жишлэгийн харьцаа (6) нь бүх бүхэл тоонуудыг эквивалентийн ангиудад хуваана. Эдгээр ангиудыг m модулийн хаслагийн ангиуд гэж нэрлэдэг. Анги тус бүр нь харгалзан

$$B_0 = \{km\}, \qquad B_1 = \{1 + km\},$$
$$B_2 = \{2 + km\}, \ \ldots, \ B_{m-1} = \{m - 1 + km\}$$

тоонуудаас тогтоно. Өөрөөр хэлбэл m-д хуваахад r үлдэгдэл гардаг тийм бүх тоонуудаас B_r анги тогтоно. $m=2$ бол энэ нь бүх бүхэл тоог тэгш ба сондгой гэж хуваана гэсэн үг. Хэрэв $m = 3$ бол бүх бүхэл тоонууд

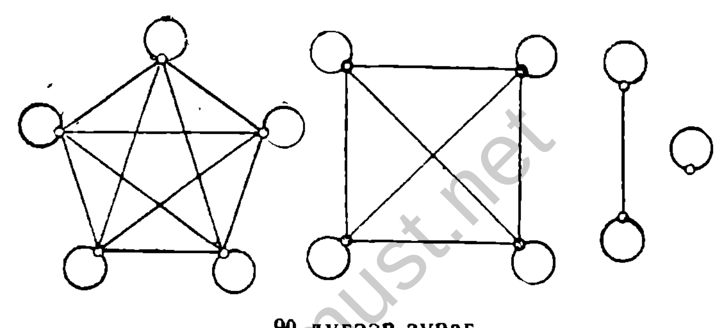
$$3k, \ 3k + 1, \ 3k + 2.$$

гэсэн ийм гурван хэлбэрийн тоонуудад хуваагдана.

Эквивалентийн харьцаа нэг бүр нь S олонлогийн бүх элементүүдийг, 89дүгээр зураг дээр үзүүлсэн шиг үл огтлолцох ангиудад хуваагддагийг бид харлаа. Урвуугаар S олонлогийг үл огтлолцох B_i олонлогуудад хуваасан ямар нэг хуваалт өгөгджээ гэж үзье. Тэгвэл a ба b нэг ижил B_i олонлогт харьяалагдаж байвал л $a \sim b$ гэж үзэж S олонлог дээр ямар нэг эквивалентийн харьцааг тодорхойлж болно. Эквивалентийн харьцааны гурван нөхцөл энд биелэгдэх нь тодорхой. Эквивалентийн харьцаа ба S олонлогийг үл огтлолцох хэсгүүдэд хуваах нь нэг асуудлын хоёр тал болох нь эндээс харагдаж байна. Эквивалентийн харьцаа бүр нь олонлогийг үл огтлолцох хэсгүүдэд хуваахад хүргэх ба урвуугаар тийм хуваалт бүр эквивалентийн ямар нэг харьцааг нэг утгатай тодорхойлно.

Математикийн биш өөр нэгэн жишээ дурдъя. Хоёр хүнийг хэрэв тэд нар нь нэг улсын иргэн бол нэг харьяатай гэж ярьдаг, урвууд нь бүх хүн төрөлхтөн нь харьяатаараа ангиудад (аль ч улсын иргэн биш тийм хүмүүс нь тус тусдаа онцлог ангиудыг үүсгэнэ) хуваагдана.

Эцэст нь эквивалентийн харьцааг граф гэж үзэх талаар ярья. Графын оройнуудын олонлогийг S-ээр тэмдэглэе. B_i ангид харьяалагдах бүх оройнууд нь хоорондоо ирмэгүүдээр холбогдох учраас B_i олонлог бүр нь бүрэн a_i графыг бүрдүүлэхээс гадна тийм граф бүрийн орой бүр нь гогцоотой байна.



90 дүгээр зураг

Хоёр өөр ангийн оройнууд хоорондоо ирмэгээр холбогдох учир авч үзэж буй R харьцааны граф G нь G_i графуудыг өөрийн холбоост компонентаар агуулна.

90 дүгээр зураг дээр 12 элементээс тогтсон олонлогийн эквивалентийн харьцааны графыг дүрсэлжээ. Энд харгалзсан ангиуд нь 5, 4, 2 ба 1 элементтэй байна.

Дасгал

1. Эквивалентийн харьцааны өөр жишээнүүдийг ол.

2. (6) жишлэгүүдийг гишүүнчлэн нэмж, хасаж, үржүүлж болдгийг батал

Хэрэв $a \equiv b (\mathrm{mod}\, m)$ **ба** $c \equiv d (\mathrm{mod}\, m)$ **бол**

$$a \pm c \equiv b \pm a (\mathrm{mod}\, m), \quad ac \equiv bd\, (\mathrm{mod}\, m)$$

3. Хоёр бодит (комплекс) тоог хэрэв тэдний абсолют хэмжигдхүүн (модуль) нь тэнцүү бол бие биедээ харгалзсан тоонууд гэж нэрлэе. Энэ харьцаа нь эквивалентийн харьцаа мөн гэдгийг үзүүлж анги бүрийн элементүүдийг тодорхойл.

4§. Зэрэмдэг эрэмбэлэлт

Математикт бас нэг чухал харьцааны жишээг гаргахын тулд ямар нэг элементүүдээс тогтсон S олонлогийг авч үзье. Энэ элементүүд нь жишээлбэл ямар нэг шинжүүдээрээ нэгтгэгдсэн тоо, цэг юмуу хүмүүс байж болно. Энэ S олонлог дотор ямар нэг бага олонлогуудын буюу A, B ... дэд олонлогуудын бүл авч үзье. Хэрэв жишээлэхэд S нь бүх бодит тооны олонлог бол тийм бүлийн дэд олонлог бүр нь жишээлэхэд ямар нэг интервалын тоонуудаас тогтсон байж болно. Хэрэв S нь хавтгайн цэгүүдийн олонлог бол A, B, ... олонлогууд нь өгөгдсөн шугам юмуу дүрсийн бүх цэгүүдээс тогтсон байж болно. Тийм хос олонлог бүрийн хувьд B олонлогийн бүх элементүүд A-д орно гэсэн агуулагдлын $A \supseteq B$ харьцаа нэг бол биелэгдэнэ, эсвэл биелэгдэхгүй. Энэ хоёр олонлогууд нь нэг ижил элементүүдээс тогтсон байж болно. Энэ тохиолдолд $A = B$ байна. Энэ агуулагдлын харьцааны хувьд:

1. *рефлексив чанар* $A \supseteq A$

2. *транзитив чанар* хэрэв $A \supseteq B$ ба $B \supseteq C$ бол $A \supseteq C$

3. *Адилтгал чанар* (эсрэг тэгш хэмтэй чанар) Хэрэв $A \supseteq B$ ба $B \supseteq A$ бол $A = B$ гэсэн гурван чанар биелэгдэх нь шууд харагдаж байна. $A \supseteq B$ харьцааны оронд эрс агуулагдлын $A \supset B$ гэж тэмдэглэдэг харьцааг ихэвчлэн хэрэглэдэг. Энэ нь бас л урьдын адил B нь A-гийн хэсэг буюу дэд олонлог гэсэн санааг илэрхийлэх боловч энэ тохиолдолд давхцах $A = B$ боломцоо хасагдах тул B нь A-гийн ***жинхэнэ дэд*** олонлог байна. Эрс агуулагдлын харьцаа нь 1°. *эсрэг рефлексив чанар:* $A \supset A$ харьцаа хэзээ ч биелэхгүй.

2°. *Транзитив чанар*: Хэрэв $A \supset B$ ба $B \supset C$ бол $A \supset C$ байна гэсэн чанаруудтай юм.

Дурын a, b, ... элементүүдтэй олонлогт тодорхойлогдсон бинар $a \geqslant b$ харьцаа нь агуулагдлын харьцааны нөхцөлүүдийг хангадаг байвал түүнийг ***зэрэмдэг эрэмбэлэлтийн харьцаа*** гэж нэрлэдэг. Ийм учраас энэ харьцаа нь:

1) $a \geqslant a$

2) Хэрэв $a \geqslant b$ ба $b \geqslant c$ бол $a \geqslant c$

3) Хэрэв $a \geqslant b$ ба $b \geqslant a$ бол $a = b$

гэсэн аксиомуудыг хангана.

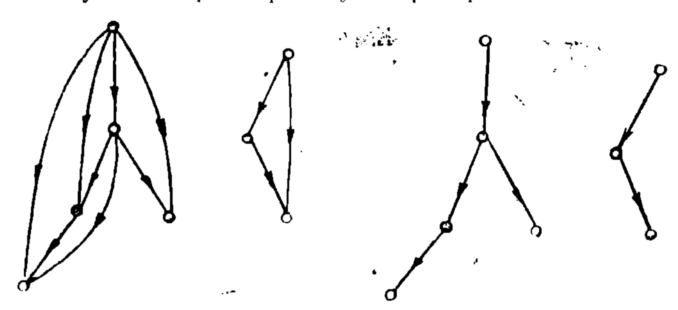
Математикийн янз бүрийн салбарт агуулагдлын тэмдгийг хурц үзүүртэй $a \geqslant b$ тэмдгээр юмуу мохоо $a \supseteq b$ тэмдгээр тэмдэглэдэг. Тодорхой хэлэхэд сүүлийн тэмдгийг ихэвчлэн олонлогийн агуулагдлын тэмдэг болгон ашигладаг.

Үнэн хэрэг дээрээ зэрэмдэг эрэмбэлэлт ба олонлогийн агуулагдал нь зөвхөн нэг байдлын хоёр өөр илэрхийлэл юм. Зэрэмдэг эрэмбэлэлтийн үед элемент a нэгбүрд $a \geqslant b$ байх тийм бүх b элементүүдээс тогтсон R_a олонлогт харгалзана. Нэгэнт энэ харьцаа рефлексив учраас a нь R_a олонлогт харьяалагдана. Ялгаатай a ба b хоёр элемент нь ялгаатай R_a ба $R_в$ олонлогуудыг тодорхойлно. Үнэндээ хэрэв $R_a = R_в$ бол нэгэн зэрэг $a \geqslant b$ ба $b \geqslant a$ байх учир $a = b$ байна. a, b элементэд харгалзах R_a $P_в$, Олонлогуудын хувьд $R_a \supseteq R_в$ агуулагдал биелж байвал л сая $a \geqslant b$ харьцаа биелнэ гэдгийг одоо харуулъя. Үнэндээ хэрэв $a \geqslant b$ бол $R_в$ -ийн c элемент бүрийн хувьд $b \geqslant c$ харьцаа биелэгдэх ба ийм учраас $a \geqslant c$ өөрөөр хэлбэл $R_a \supseteq R_в$ байна. Нөгөө талаас хэрэв $R_a \supseteq R_в$ бол $a \geqslant b$ байна. Учир нь b нь $R_в$ -д харьяалагдана.

Яг өмнөхийн адилаар эрс зэрэмдэг эрэмбэлэлтийн доорх нөхцөлүүдэд тохирдог $a > b$ харьцааг тодорхойлдог. Энэ нь

1) $a > a$ харьцаа боломжгүй

2) хэрэв $a > b$ ба $b > c$ бол $a > c$ гэсэн нөхцөлүүдээр тодорхойлогдох харьцаа юм. a,b-д харгалзах R_a , $R_в$ олонлогуудын хувьд $R_a \supset R_в$ эрс агуулагдал биелж байвал л сая $a > b$ харьцаа биелнэ гэдгийг өмнөхийн адил баталж болно. Энд $>$ тэмдгийг тоонуудын...ээс их гэсэн утгаас арай өргөн утгаар хэрэглэдэг.

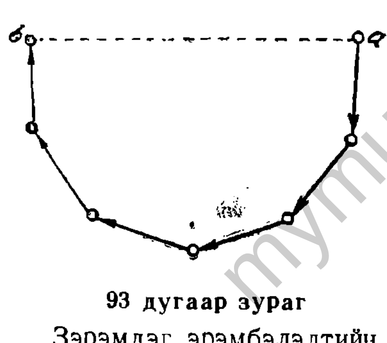


91 дүгээр зураг

92 дугаар зураг

Зэрэмдэг эрэмбэлэлтийн харьцааны G графыг тухайлбал оройн оройн тоо төгсгөлтэй байх нөхцөлд авч үзье. Зэрэмдэг эрэмбэлэлт ба эрс зэрэмдэг эрэмбэлэлтийн харгалзах графууд нь нэг нь оройнууд дээрээ гогцоотой нөгөө нь гогцоогүй байх төдийхнөөр л ялгагдах учир энэ хоёр ойлголтыг хэт нарийн ялгахын шаардлагагүй юм. Хэрэв $a>b$ байвал G граф дээр чиглэлт (a,b) ирмэг байна. 8 элементтэй-оройтой олонлогийн эрс зэрэмдэг эрэмбэлэлтийн харьцааны графыг 91 дүгээр зураг дээр дүрсэлжээ.

Зэрэмдэг эрэмбэлэлтийн графыг ихэнхдээ арай өөр байдлаар дүрсэлдэг гэдгийг урьдчилан сануулъя. Жишээлбэл өмнө дүрсэлсэн граф дээр дурын (a,b) ба (b,c) ирмэгүүдийн хувьд бас (a,c) ирмэг мөн байна. Ийм учраас тийм бүх битүүлэгч ирмэгүүдийг орхиж манай графыг хялбарчилж болно. Ер нь a-гаас b рүү явсан чиглэлт ямар ч гинж $A(a,b)$ байлаа ч гэсэн, нарийн яривал, граф дээр (a,b) ирмэг байх ёстой боловч тийм битүүлэгч ирмэгүүд оршин байх нь чиглэлт харгалзах гинжүүдийн оршин байхаас шууд мөрдөн гарах тул тийм ирмэгүүдийг илүү гэж үзээд орхиж болно. Ийм маягаар 91 дүгээр зураг дээрх графыг өөрчилбөл 92 дугаар зураг дээр дүрслэгдсэн хялбар граф гарна.

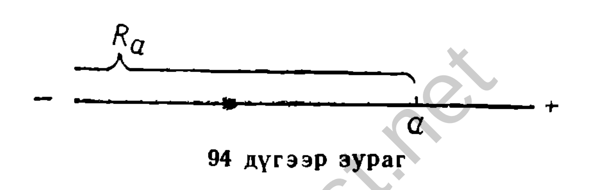


93 дугаар зураг

Зэрэмдэг эрэмбэлэлтийн графаас бүх гогцоо ба бүх илүү ирмэгүүдийг зайлуулахад гарах графыг харгалзах харьцааны суурь граф гэж нэрлэдэг. Хэрэв $A(a, b)$ нь суурь граф дээрх чиглэлт гинж бол (a,b) ирмэг нь илүү ирмэг учраас суурь граф дээр энэ ирмэг байхгүй байна. Мөн энд эсрэг чиглэсэн (b, a) ирмэг байж болохгүй. Учир нь тийм ирмэг байж гэж үзвэл тэр нь $A(a, b)$-тэй нийлж a-д буцаж ирсэн чиглэлт цикл үүсгэх ба эндээс $a>a$ мөрдөн гарах болж 1 нөхцөлтэй зөрчилдөх болно (93 дугаар зураг). Нөгөө талаас a-гаас b-рүү явсан чиглэлт гинж байвал л сая $a>b$ гэж үзвэл чиглэлт циклүүдийг агуулаагүй чиглэлт граф өөрөөр хэлбэл цикл биш чиглэлт граф нэг бүр нь зэрэмдэг эрэмбэлэлтийг тодорхойлно гэж үзсэн болно. Зэрэмдэг эрэмбэлэлтийн

$a > b$ харьцаа нь өмнөх нөхцөлүүдээс гадна бас доорх нөхцөлд тохирдог бол түүнийг (эрс утгаар) эрэмбийн харьцаа гэж нэрлэдэг.

Бүрэн байх нөхцөл. Давхцаагүй дурын хоёр a ба b элементүүдийн хувьд $a > b$ юмуу $b > a$ хоёр харьцааны нэг заавал биелдэг байх. Өөрөөр хэлбэл олонлогийн бүх элементүүд нь хоорондоо энэ харьцаагаар „жишигддэг" энэ харьцааг зэрэмдэг эрэмбэлэлтээс ялгахын тул заримдаа бүрэн эрэмбэлэлтийн харьцаа гэж нэрлэдэг. Үүнтэй адилаар эрэмбийн $a \geqslant b$ харьцааг зэрэмдэг эрэмбэлэлтийн харьцааны нөхцөлүүд дээр бүрэн байх нөхцөлийг нэмж тодорхойлдог. Бүрэн эрэмбийн харьцааны



94 дүгээр зураг

хувьд a ба b элементүүдэд харгалзах R_a ба $R_в$ олонлогууд нь нэг бол $R_a \supset R_в$ нэг бол $R_в \supset R_a$ нөхцөлд заавал тохирно. Математикт болон өдөр тутмын амьдралд бид эрэмбэлэгдсэн олонлогтой олонтой тохиолддог. Жишээлбэл толь бичигт үгсийг цагаан толгойн дэс дараалаар эрэмбэлдэг, сурагчдыг өндрөөр нь, спортын тэмцээнд авсан оноогоор нь, хичээлийн дүнгээр юмуу бас бус олон аргаар эрэмбэлж болно. Математикт хамгийн их дайралддаг эрэмбэлэгдсэн олонлог нь бодит тоон тэнхлэг юм. Энд R_a олонлог нь $a > b$ нөхцөлд тохирдог бүх b тоонуудаас өөрөөр хэлбэл тоон тэнхлэг дээр a-гаас зүүн тийш орших бүх тоонуудаас тогтоно (94 дүгээр зураг).

Төгсгөлт тооны эрэмбэлэгдсэн олонлог их тохиолддог. Тийм олонлог нь бусад бүх элементээс нь бага ямар нэг a_1 элементийг агуулах дараагийн элемент a_2 нь a_1-ээс их боловч бусад бүх элементүүдээс нь бага гэх мэтчлэн хамгийн их a_n элемент хүртэл явж болно. Ийм учраас тийм олонлогийн элементүүд нь өсөх эрэмбээр байрласан 1,2 . . . n бүхэл тоонууд шиг эрэмбэлэгдсэн байна. Үүнийг n элементтэй эрэмбэлэгдсэн

олонлог бүр нь эрэмбийнхээ харьцааны хувьд 1,2 . . . n бүхэл тооны олонлогтой адил зохион байгуулалттай байна гэж илэрхийлж болно.

Дасгал

1. 1, 2,3, 4 гэсэн дөрвөн тооноос тогтсон эрэмбэлэгдсэн олонлогийн бүрэн граф ба суурь графуудыг зур.

2. 1,2,3, . . . n гэсэн n тооноос тогтсон эрэмбэлэгдсэн олонлогийн суурь граф нь ямар байх вэ?

3. Бүхэл тооны олонлогийн хуваагдлын $a|b$ харьцаа нь зэрэмдэг эрэмбэлэлтийн харьцаа мөн болохыг батал. Энэ тохиолдолд зэрэмдэг эрэмбэлэлт ба эрс зэрэмдэг эрэмбэлэлт ямар ялгаатай вэ?

4. a, b, c гурван элементээс тогтсон S олонлогийн бүх дэд олонлогуудыг ол. Энд хэдэн дэд олонлог байх вэ? Харгалзах зэрэмдэг эрэмбэлэлтийн[1] граф ба суурь графыг байгуул. Яагаад энд ерөөсөө элемент агуулаагүй хоосон олонлогийг авч үзэх хэрэгтэй вэ?

---

[1] агуулагдах харьцаанд харгалзах гэж ойлгоно. (Ред.)

VIII БҮЛЭГ

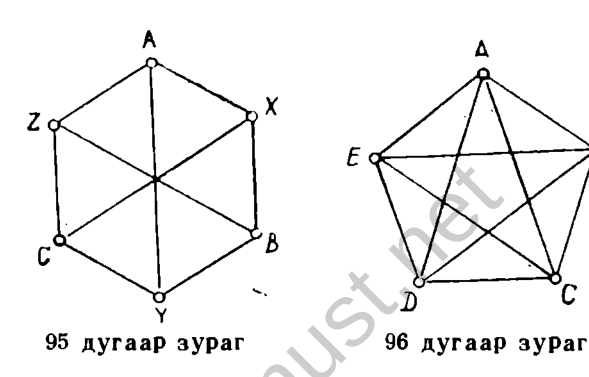
ХАВТГАЙ ГРАФУУД

1§. Графын хавтгай байх нөхцөл

Ирмэгүүд нь оройнуудаасаа өөр огтлолцлолын цэгүүдгүй байхаар хавтгай дээр зурж болдог графуудыг бид хавтгай графууд гэж нэрлэсэн (1 бүлгийн 4§-ийг дахин унш) билээ. Хавтгай графын хэд хэдэн жишээг бид дээр дурдсан. Бид I бүлгийн 5§-д гурван айл ба гурван худгийн тухай бодлогыг авч үзэж харгалзсан граф нь яагаад хавтгай биш вэ? гэдгийг тайлбарласан. Энэ бодлогын графыг (16 дугаар зураг) олон аргаар зурж болно. Ер нь ямар ч графыг олон аргаар зурж болдог. «Энэ бодлогын графын» тухай ярихдаа бид өнгөрсөн байдлыг дүрсэлж байгаа тухайн ямар нэг графтай изоморф дурын графыг санаж байх болно. Ийм учраас 16 дугаар зураг дээр дүрсэлсэн граф нь хавтгай биш ээ гэж батлан хэлж буй нь түүнтэй изоморф, шаардсан нөхцөлүүдийг хангуулан хавтгай дээр зурж болдог граф байхгүй гэсэн үг юм. Энэ графын оройнуудыг жишээлбэл 95 дугаар зураг дээр дүрсэлсэн шиг зөв зургаан өнцөгтийн оройнууд дээр байрлуулж болно. Зургаан өнцөгтийн төв дэх ирмэгүүдийн огтлолцсон цэг нь графын орой биш юм. Энэ цэг дээр графын ирмэгүүд бие биенийхээ доогуур дээгүүр гарч байна гэж сэтгэж болно.

Тавхан оройтой хавтгай биш граф байдаг. Энэ нь таван оройтой бүрэн граф (96 дугаар зураг) юм. Энэ граф үнэндээ хавтгай биш гэдгийг 95 дугаар зураг дээрх (эсвэл 16 дугаар зураг дээрх) графын хавтгай бишийг I бүлгийн 5§-д яаж тайлбарласан адилаар тайлбарлаж болно. Тийм графын хавтгай дээрх дурын дүрс-

лэлд түүний оройнууд нь жишээлэхэд $ABCDEA$ эрэмбээр ямар нэг P циклийг үүсгэх ёстой. Тийм хавтгай графад (B, E) ирмэгийг татахдаа бид түүнийг P-гийн дотор юмуу гадна нь байрлуулах боломжтой. Хоёр тохиолдлын аль нь ч цаашдын сэтгэлгээний хувьд ижил юм. Бид энэ ирмэгийг 97 дугаар зураг дээр дурсэлсэн шиг байрлуулав гэж бодъё. A орой нь D ба C-тэй ирмэгүүдээр холбогдсон байх ёстой. (B, E) ирмэг нь эдгээр ирмэгийг P дотор байрлуулахад нь саад болох учир энэ хоёр ирмэг нь хоёулаа P-гийн гадаа байрлана.



95 дугаар зураг 96 дугаар зураг

(A,C) ирмэг нь B оройд гаднаас ирэхэд нь саад болох учир (D, B) ирмэг нь зөвхөн P-гийн дотор л байрлаж болно. Тэгвэл сүүлийн (C,E) ирмэгийг хавтгай дээр татах ямар ч боломжгүй болно. Учир нь (D, B) ирмэгээс болж тэр нь P дотор байж болохгүй ба харин (A,D) ирмэгээс болж P-гийн гадаа байж болохгүй болно.[1]

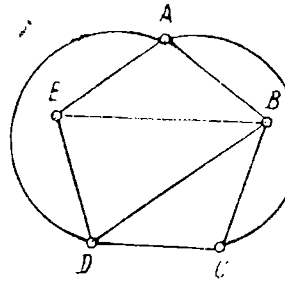
Гурван гэр ба гурван худгийн тухай бодлогын граф ба таван оройтой бүрэн графыг бид тодорхой авч үзлээ. Учир нь эдгээр граф өгөгдсөн граф хавтгай граф уу? үгүй юу гэдгийг тодорхойлоход онцгой үүрэг гүйцэтгэдэг. Хавтгай графыг тодорхойлдог шинжийг 1930 онд Польшийн математикч Куратовский олжээ. Тэр шинжийг томьёолохын тулд графыг өргөтгөх ба агших гэж юуг хэлэх вэ? гэдгийг эхлээд тайлбарлах хэрэгтэй болно.

Графын ямар нэг ирмэг дээр бид шинэ оройнуудыг нэмж түүнийг хэд хэдэн ирмэгээс бүтсэн энгийн гинж болгон хувиргалаа гэж бодъё. Энэ үйлдлийг бид гра-

---

[1]Өөр нэг баталгааг 3§-д үз.

фыг өргөтгөх үйлдэл гэж нэрлэе. 98 дугаар зураг дээр 4 оройтой *а* графыг δ граф болгон өргөтгөсний жишээг харуулав. Үүний урвууд ирмэгүүдэд хуваагддаг, тэгэхдээ завсрын оройнуудаас нь ямар нэгэн өөр ирмэг гардаггүй тийм энгийн гинжүүдийг агуулсан 98 дугаар зураг дээрх δ граф шиг тийм граф бидэнд өгчээ, гэж бид бодъё. Урвуу үйлдлээр түүнийг, энгийн гинжүүд нь ирмэгүүд болж хувирсан тийм граф болтол нь агшааж болно.



97 дугаар зураг

Жишээлбэл 98 дугаар зургийн δ графыг түүний оройнуудыг ялгаж буй энгийн гинжүүдээс нь зайлуулах замаар *а* граф болгон хувиргаж болно.

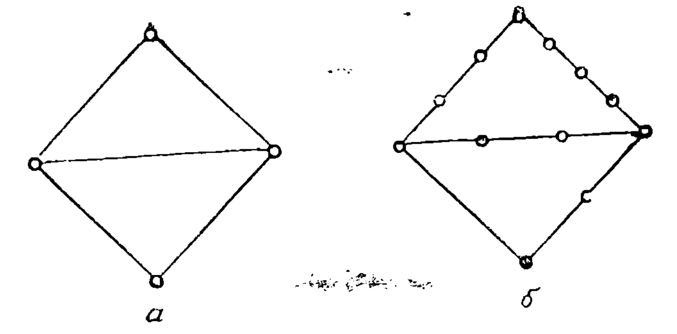
Одоо бид Куратовскийн теоремийг томьёолох боломжтой боллоо.

Граф хавтгай байх гарцаагүй ба хүрэлцээтэй нөхцөл нь таван өнцөгт граф (96 дугаар зураг) юмуу зургаан өнцөгт граф (95 дугаар зураг) болгон агшааж болох ямарч графыг тэр дотроо агуулаагүй байх явдал мөн.

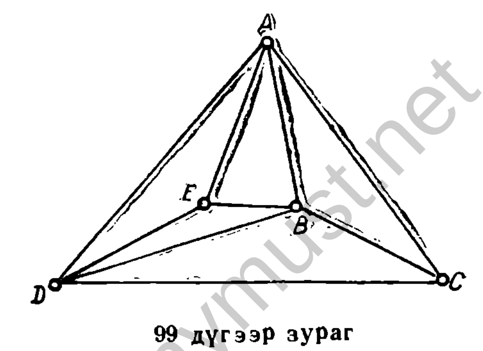
Энэ теоремийн баталгаа тийм ч их төвөгтэй биш боловч нилээд нүсэр, их зай эзлэх учир бид батлахгүй орхиё.

Хавтгай графын талаар бас хэдэн тайлбар хийе. Жишээлбэл 17 дугаар зураг дээрх юмуу 97 дугаар зураг дээрх графуудын хавтгай дүрслэлийг олохыг оролдохдоо бид ирмэгүүдийг ямар нэг муруй шугамаар дүрсэлж байсан билээ. Үнэн хэрэг дээрээ энэ нь тийм ч чухал биш юм. Аль ч хос оройнууд нэгээс илүүгүй ирмэгээр холбогдсон байх нөхцөлд хавтгай граф бүхнийг ирмэг бүр нь шулууны хэрчим байхаар хавтгай дээр зурж болдгийг харуулж болно. 97 дугаар зураг дээрх графын «Шулуун шугамын дүрслэлийг» 99 дүгээр зураг дээр жишээ болгон үзүүллээ.

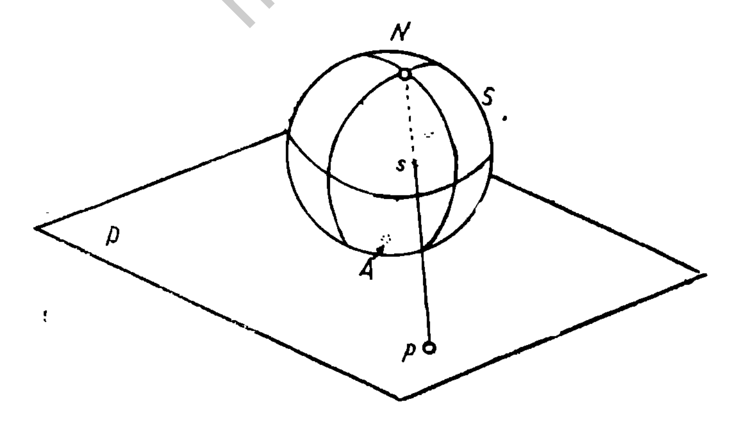
Хавтгай граф бүхнийг мөн бөмбөлгийн гадаргуу дээр дүрсэлж болно гэж сануулах нь чухал юм. Ингэж дүрслэх олон арга буй. Жишээ нь: стереографын проекцийг ашиглаж болно. Дэлхийн бөмбөрцгийн туйл орчмын зураг хийхэд энэ аргыг газрын зурагт хэрэглэдэг.



98 дугаар зураг



99 дүгээр зураг



100 дугаар зураг

P нь манай графын байрласан хавтгай болог. S бөмбөлгийг өмнөд туйлаараа энэ хавтгайтай шүргэлцэж байхаар (100 дугаар зураг) байрлуулъя. Хойд туйл N-ийг проекцийн төв болгон авъя. P хавтгайн p цэг бүрийг N цэгтэй шулуунаар холбоё. Энэ шулуун нь S бөмбөлгийг ямар нэг s цэгт огтлолцоно. Иймд P хавтгайн p цэг бүхэнд S бөмбөлгийн харгалзах s цэг олдоно. Урвуу проекцоор S-ийн гадаргуу дээрх граф бүхнийг S-тэй шүргэлцсэн хавтгай дээр буулгаж болно. S-ийн цэгүүд дотроос P хавтгай дээр дүргүй ганц цэг нь проекцийн төв N юм.

Дасгал

1. 95 дугаар зураг дээрх графаас (A,Y) ирмэгийг зайлуулж гарсан графыг, бүх ирмэгүүд нь үл огтлолцох шулуун хэрчим байхаар хавтгай дээр зур.

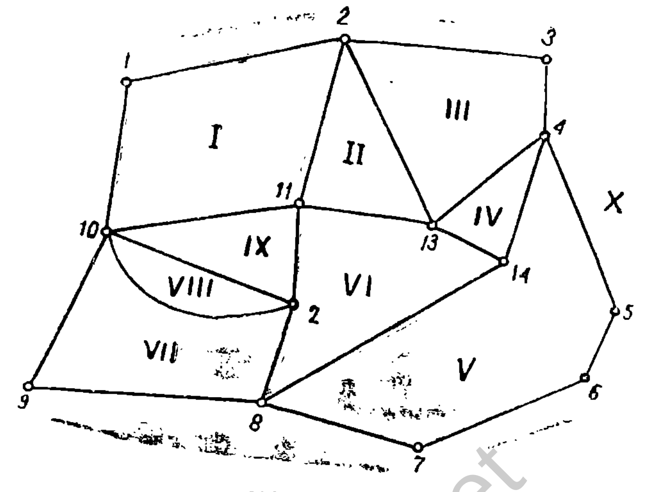
2. 6 оройтой хавтгай биш бүх графыг олохыг хичээ.

2§. Эйлерийн томьёо

Одоо хавтгай дээр *олон өнцөгт тор* үүсгэдэг хавтгай графуудыг авч үзье. Энэ нь хавтгай G графын ирмэгүүд нь бие биетэйгээ хамар олон өнцгүүдийг үүсгэн хавтгайг 101 дүгээр зураг дээр дүрсэлсэн шигээр олон өнцөгт мужуудад хуваана гэсэн үг юм.

Олон өнцөгтийн тухай энд ярихдаа олон өнцөгт гэдэг нэр томьёог ерийн утгаар хэрэглэдэг шигээр ирмэгүүд нь шулуун шугамууд байна гэж үзэхгүй гэдгийг онцлон тэмдэглээ.

Энд ирмэгүүд нь өөрийгөө огтлоогүй, хавтгайг мужуудад хуваадаг тасралтгүй ямар ч муруйнууд байж болно. Америкийн нэгдсэн улсын штатуудад хуваагдсан газрын зураг юмуу ер нь улс орнуудыг хил хязгаартай нь зурсан газрын ямар ч зураг олж өнцөгт графын сайн жишээ болж чадна. Энэ хилүүд нь графын ирмэгүүд ба улсууд нь олон өнцгүүд юм. Ийнхүү бид олон өнцөгт графуудыг одоо авч үзэх болно. Тодорхойлолтоос үзвэл эдгээр нь холбоостой, түүнээс гадна мөн ямар олон өнцөгт нь нөгөөгийнхөө дотор байж болохгүй гэсэн шаардлага тавина. Тийм олон өнцөгт тус бүрийг хиллэж байгаа ирмэгүүд нь цикл үүсгэнэ. Заримдаа энэ циклүүдийг ***минималь циклүүд*** гэж нэрлэдэг. Тийм олон өнцөгтийн дотор хаагдсан хавтгайн



101 дүгээр зураг

хэсгийг графын ***талс*** гэж нэрлэдэг. Тийм графад бүх талстуудтай нь бүсэлсэн ***максималь*** C_1 цикл байна. Бүх томьёонуудыг аль болох хялбар болгохын үүднээс зарим нэг зүйлийг хэлэлцэн тохирох зарчим математикт олон тохиолддог билээ. Жишээлбэл манай тохиолдолд C_1-ийн гадна оршиж буй хавтгайн хэсгийг C_1 хилтэй талс гэж үзэх нь ашигтай юм. Бид түүнийг төгсгөлгүй F_∞ талс гэж нэрлээ. Графыг бөмбөлөг дээр проекцлон төгсгөлгүй талс нь үнэндээ бусад талаасаа ялгагдах ямар ч ялгаагүй юм гэдгийг харж болно.

Энэ бүхнийг 101 дүгээр зургийн граф дээр тайлбарлая. Энэ граф нь I-ээс X хүртэл дугаарлагдсан 10 талстай. Жишээлбэл: I талаас

$$(1,2),\ (2,11),\ (11,10),\ (10,1)$$

ирмэгүүдээр хиллэсэн ба харин VIII талс 10 ба 12 оройг холбосон хоёр ирмэгээр хязгаарлагдсан байна. Максималь C_1 циклийн ирмэгүүд нь 1-ээс 10 хүртэлх бүх оройнуудыг дэс дараалан дайрч 1 оройд буцаж ирсэн байна. Төгсгөлгүй X талс C_1-ийн гадна орших бүх цэгүүдийн олонлог болно.

Огторгуйн олон талсуудын хувьд Эйлер анх баталсан, олон талстын ***Эйлерийн томьёо*** гэж нэрлэгддэг

сонирхолтой нэг томьёо байдаг. Энэ томьёо нь манай олон өнцөгт графын хувьд хүчинтэй. Графын орой, ирмэг, талсын тоонуудыг харгалзан

$$b,\ p,\ г$$

гэж тэмдэглээ. Эйлерийн теорем нь ямагт

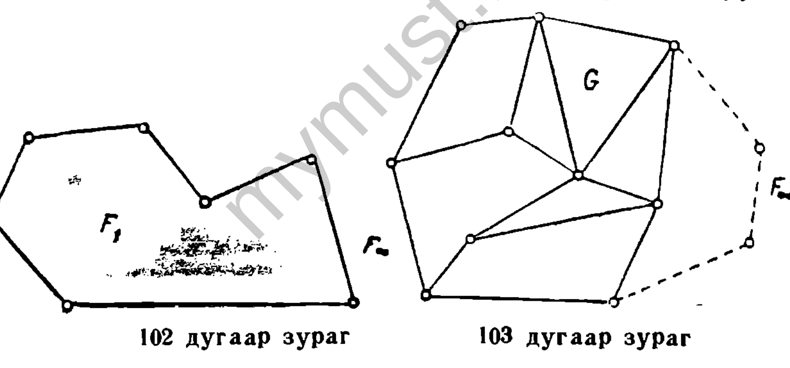
$$b-p+г=2 \qquad (1)$$

байхыг нотолно.

Баталгаа: n ирмэгтэй зөвхөн нэг олон өнцөгтийг (102 дугаар зураг) авч үзсэн хялбар тохиолдолд томьёо нь илэрхий юм. Энэ тохиолдолд

$$b=p=n,\ г=2$$

байх тул (*1*) тэнцэл үнэндээ биелэгдэнэ. Ерөнхий тохиолдолд энэ томьёо хүчинтэй гэдгийг батлахын тул математикийн индукцийн аргыг хэрэглээ. Тодорхой хэлбэл хэрэв $г$ талстай графын хувьд энэ томьёо хүчинтэй бол $г+1$ талстай графын хувьд үнэн байна гэдгийг бид үзүүлье. Талсыг дараалан нэг нэгээр «гаднаас» нэмэх замаар олон өнцөгт графыг байгуулж



102 дугаар зураг 103 дугаар зураг

болно. G нь b оройтой, p-ирмэгтэй, $г$-талстай олон өнцөгт граф (103 дугаар зураг дээрх тод шугамууд), b, p, $г$ тоонуудын хувьд Эйлерийн томьёо хүчинтэй байж гэж бодъё.

G графын максималь циклийн хоёр оройг холбосон ямар нэг энгийн гинжийг (103 дугаар зураг дээр тасархайгаар зурагдсан шугамыг) F_∞ талс дээгүүр татаж шинэ талсыг нэмье. Хэрэв энэ нум нь r ирмэгтэй бол $r-1$ шинэ орой ба нэг шинэ талсыг бид нэмэх хэрэгтэй. Харин тэгвэл

$$b^1 - p^1 + г' = (b + г - 1) - (p + г) + (г + 1) = b - p + г$$

байх тул шинэ графын хувьд Эйлерийн томьёо нь хүчинтэй хэвээр үлдэнэ.

Дасгал

1. 13 дугаар зураг дээрх графын хувьд Эйлерийн томьёог шалга.

2. Шатрын 8×8 квадрат нүдтэй хөлгийн үүсгэсэн графын хувьд дээрх томьёог шалга. Энэ сэтгэлгээг n×n квадрат нүдтэй хөлөгний хувьд дэлгэрүүл.

3§. Графын зарим нэг харьцаа

Хоёрдмол графууд

Энэ зүйлд бид дахиад л олон өнцөгт графуудыг авч үзэх болно. Эйлерийн (1) томьёог

$$b + г = p + 2 \tag{2}$$

хэлбэртэй бичье. Орой тус бүрээс гарсан ирмэгүүдийг тоолж графын ирмэгийн тоог олж болно. Ингэхэд ирмэг бүр нь хоёр удаа тоологдох учир 1 дүгээр бүлгийн 6 §-ийн (1) тэнцэлтэй давхацсан

$$2p = \rho(A_1) + \ . \ . \ . \ + \rho(A_s) \tag{3}$$

томьёо гарна. Энд $\rho(A_i)$ нь A_i оройн зэрэг буюу түүнээс гарсан ирмэгүүдийн тоо юм. 101 дүгээр зураг дээрх графын хувьд $p = 22$ байна.

Олон өнцөгт графын ирмэгийн тоог бас өөрөөр тоолж олж болно. Граф G-ийн k-өнцөгтэй талсын тоог φ_k гэж тэмдэглээ. Энд $k = 2, 3, 4$ . . . байна.

Жишээлбэл 101 дүгээр зураг дээрх графын хувьд

$$\varphi_2 = 1, \ \varphi_3 = 3, \ \varphi_4 = 3, \ \varphi_5 = 1$$
$$\varphi_6 = 1 \ \varphi_7 = 0 \ \varphi_8 = 0 \ \varphi_9 = 0, \ \varphi_{10} = 1$$

байна. Өөрөөр хэлбэл түүний 10 талсууд дотор хоёр ирмэгээр хязгаарлагдсан талс нэг, гурван ирмэгээр хязгаарлагдсан талс гурав гэх мэтчлэн байна. Тийм олон өнцөгт торд гогцоо байхгүй учраас түүнд нэг ирмэгээр хязгаарлагдсан талс байхгүй. Иймучраас

$$г = \varphi_2 + \varphi_3 + \varphi_4 + \ . \ . \ . \tag{4}$$

Одоо графын ирмэгийг дахин тооцохын тулд түүний ирмэг бүр нь яг хоёр талсын хил болно гэдгийг тэмдэглээ. Иймучраас

$$2p = 2\varphi_2 + 3\varphi_3 + 4\varphi_4 + \ . \ . \ . \tag{5}$$

байна. Эндээс 101 дүгээр зураг дээрх графын хувьд бас л $p=22$ гарч байна.[1])

Олон өнцөгт G граф бүрийн хувьд түүний ***хоёрдмол граф*** гэж нэрлэгддэг олон өнцөгт шинэ G^* графыг доорх маягаар байгуулж болдог.

Талс тус бүр дотор мөн түүнчлэн хязгааргүй талс дотор ч нэг нэг цэгийг сонгож авъя. Тийм хоёр A ба B дотоод цэгүүд нь хилийн ерөнхий E ирмэгтэй хамар хоёр талст хамаарч байвал л A-гаас B руу шинэ ирмэгийг E ирмэгтэй огтлолцуулан харин графын бусад ирмэгүүдтэй огтлолцуулахгүйгээр татъя. Хэрэв хоёр талс нь хилийн хэд хэдэн ирмэгтэй байвал тэр ирмэг нэг бүрийн хувьд нэг нэг ирмэг татъя.

---

[1] таван оройтой бүрэн граф (96 дугаар зураг) ба гурван гэр ба гурван худгийн бодлогын граф (16 дугаар зураг) нь хавтгай биш графууд юм гэдгийг (4) ба (5) томьёонуудыг ашиглан дахин баталж болно.

Нэгдүгээр тохиолдолд оройн тоо $b=5$ ба ирмэгийн тоо $p=\frac{5\cdot 4}{2}=10$ байна. Хэрэв энэ граф хавтгай байсансан бол Эйлерийн теоремээр түүний талсын тоо $г$ нь $2-b+p=7$-тай тэнцүү байхсан билээ. Энэ графын хоёр оройн тус бүр нь ганц ирмэгээр холбогдох учраас түүний хувьд $\varphi_2=0$ ба (4) ба (5) томьёо ёсоор

$$г=7=\varphi_3+\varphi_4+\varphi_5+\ \dots$$
ба
$$2p=20=3\varphi_3+4\varphi_4+5\varphi_5+\ \dots$$

нэгдүгээр тэнцлийг 3-аар үржүүлбэл

$$21=3\varphi_3+3\varphi_4+2\varphi_5+\ \dots$$

болох ба энэ нийлбэр нь 20-той тэнцүү хоёрдугаар нийлбэрээс бага баина. Энэ зөрчил нь бидний авч үзсэн буруу болохыг харуулж байна.

Хоёрдугаар тохиолдолд $b=6$, $p=\frac{6\cdot 3}{2}=9$, Хэрэв граф нь хавтгай байсан бол түүний талсын тоо $г$ нь 5-тай тэнцүү байх ёстой байна. Энд зөвхөн φ_2-0 төдийгүй мөн $\varphi_3=0$ (хоёр гэр юмуу хоёр худаг хоорондоо холбогдолгүй) учир

$$г=5=\varphi_4+\varphi_5+\varphi_6+\ \dots$$
ба
$$2p=18=4\varphi_4+5\varphi_5+6\varphi_6+\ \dots$$

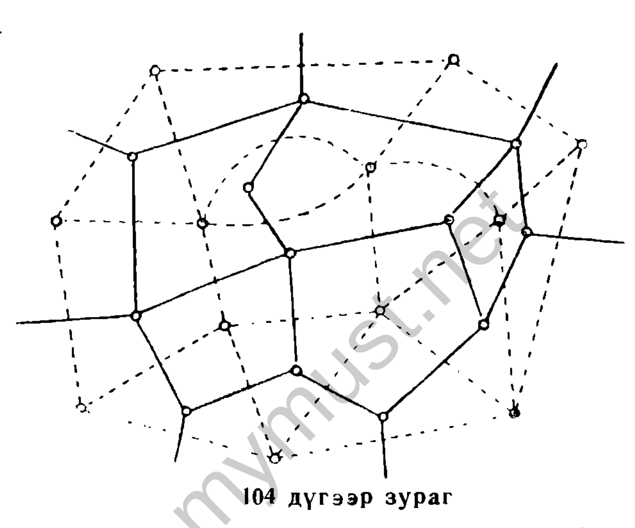
байна. Нэгдүгээр тэнцлийг 4-өөр үржүүлбэл

$$20=4\varphi_4+4\varphi_5+4\varphi_6+\ \dots$$

гарна. Энэ нийлбэр 18-тай тэнцүү хоёрдугаар нийлбэрээс бага байна.

104 дүгээр зураг дээр G графыг тод шугамаар харин G^* графыг тасархай шугамаар дүрсэлжээ. Хоёрдмол G^* графыг зөвхөн хавтгай граф G-ийн хувьд л байгуулж болно.

Олон өнцөгт графын хоёрдмол граф нь өөрөө мөн олон өнцөгт граф байна. 104 дүгээр зургаас үзвэл G графын F талс нэг бүрд G^* графын яг нэг V^* орой харгалзах ба тэгэхдээ G^* графын V^* орой дээр ирсэн ирмэгүүдийн тоо нь G графын харгалзсан F талсыг



104 дүгээр зураг

хязгаарлаж байгаа ирмэгийн тоотой тэнцүү байна. Ийм учраас G^* графын V^* оройн зэрэг нь G графын харгалзах F талсыг хязгаарласан ирмэгийн тоотой тэнцүү байна. G графын E ирмэг бүрд G^* графын, түүнтэй огтлолцсон ганц E^* ирмэг харгалзана.

G графын V орой тус бүр $\rho(V)$ ирмэг ирнэ. Тэдгээр нь G^* графын F^* талсыг үүсгэж байгаа ирмэгүүдтэй огтлолцоно. Ийм учраас F^* талс нь G^* графын $\rho(V)$ ирмэгүүдээр хязгаарлагдана. G граф нь өөрийн ээлжинд G^* графын хоёрдмол граф болохыг 104 дүгээр зургаас хялбархан харж болно. Энэ хоёр граф нь нэг ижил тооны ирмэгтэй ба G^* графын оройн тоо нь G графын талсын тоотой тэнцүү, G^* графын талсын тоо нь G графын оройн тоотой тэнцүү байна.

4§. Зөв олон талстууд

Хэрэв орой бүр дээр нь нэг ижил ρ тооны ирмэг нийлдэг (1 бүлгийн 6 §-ийг үз) графыг ***нэг төрлийн граф*** гэж нэрлэдэг. Хэрэв олон өнцөгт нэг төрлийн G графын хоёрдмол G^* граф нь мөн нэг төрлийн граф байвал G графыг ***зөв граф*** гэж нэрлэнэ. Энэ нь (өмнөх §-ийг үз) G графын талс бүр нь нэг ижил тооны жишээлэхэд ρ^* ирмэгээр хязгаарлагдсан байх ёстой гэсэн үг юм.

Маш цөөхөн зөв граф байдгийг одоо бид үзүүлье. Хэрэв G графын ирмэгийн тоог (3) ба (5) томьёогоор тооцоолбол зөв графын хувьд энэ хоёр нийлбэр нь

$$2p=\rho b=\rho^* г \tag{6}$$

илэрхийлэлд шилжинэ. (6) тэнцлээс

$$p=\frac{1}{2}\rho b; \quad g=\frac{\rho}{\rho^*}b;$$

гэж олж Эйлерийн (2) томьёонд орлуулбал

$$b\left(1+\frac{\rho}{\rho^*}-\frac{1}{2}\rho\right)=2 \tag{7}$$

болох ба энэ илэрхийллийг

$$b(2\rho+2\rho^*-\rho\rho^*)=4\rho^*$$

гэж бичиж болно.

Нэгэнт b ба ρ^* нь эерэг бүхэл тоонууд учраас хаалтанд байгаа илэрхийлэл нь мөн эерэг бүхэл тоо байх ёстой.

$$2\rho+2\rho^*-\rho\rho^*>0$$

Энэ тэнцэл бишийг

$$\rho\rho^*-2\rho-2\rho^*<0$$

хэлбэрээр юмуу

$$(\rho-2)(\rho^*-2)<4 \tag{8}$$

гэж бичье.

(8) тэнцэл бишийг бид хоёр тохиолдол болгон бодъё. Эхлээд $\rho-2$ ба ρ^*-2 хоёр үржигдхүүн хоёулаа эерэг буюу өөрөөр хэлбэл ρ ба ρ^* тус бүр хоёроос их байх тохиолдлыг авч үзье. Үржвэр нь 4-өөс бага байдаг бүх эерэг бүхэл хос тоонууд нь 1 ба 1, 1 ба 2, 1 ба 3 гэсэн хосуудаар шавхагдах тул $\rho-2\leqslant 3$ ба $\rho^*-2\leqslant 3$ байна. Энэ тохиолдолд ρ ба ρ^* нь дараахь хүснэгтэд бичигдсэн утгыг л авч болно.

Зөв графууд

ρ	ρ^*	b	p	$г$	Маяг
3	3	4	6	4	Тетраэдр
3	4	8	12	6	Куб
3	5	20	30	12	Додекаэдр
4	3	6	12	8	Октаэдр
5	3	12	30	20	Икосаэдр

Энд (6) ба (7) томьёонуудыг хэрэглэж ирмэг, орой, талсын тоог тооноолон гаргажээ. Дээрх хүснэгтэд дурдсан зөв графуудыг байгуулахыг $\rho=3$, 4 юмуу 5 утгуудад харгалзах гурвалжин дөрвөн өнцөгт юмуу таван өнцөгтөөс эхэлнэ. Орой бүр дээр нь зохих тооны талс нийлсэн байхаар олон өнцөгтүүдийг эвлүүлбэл таван тохиолдолд нэг бүрт изоморфизмийн нарийвчлалтайгаар яг нэг нэг зөв граф олдоно (105 дугаар зургийг хар)

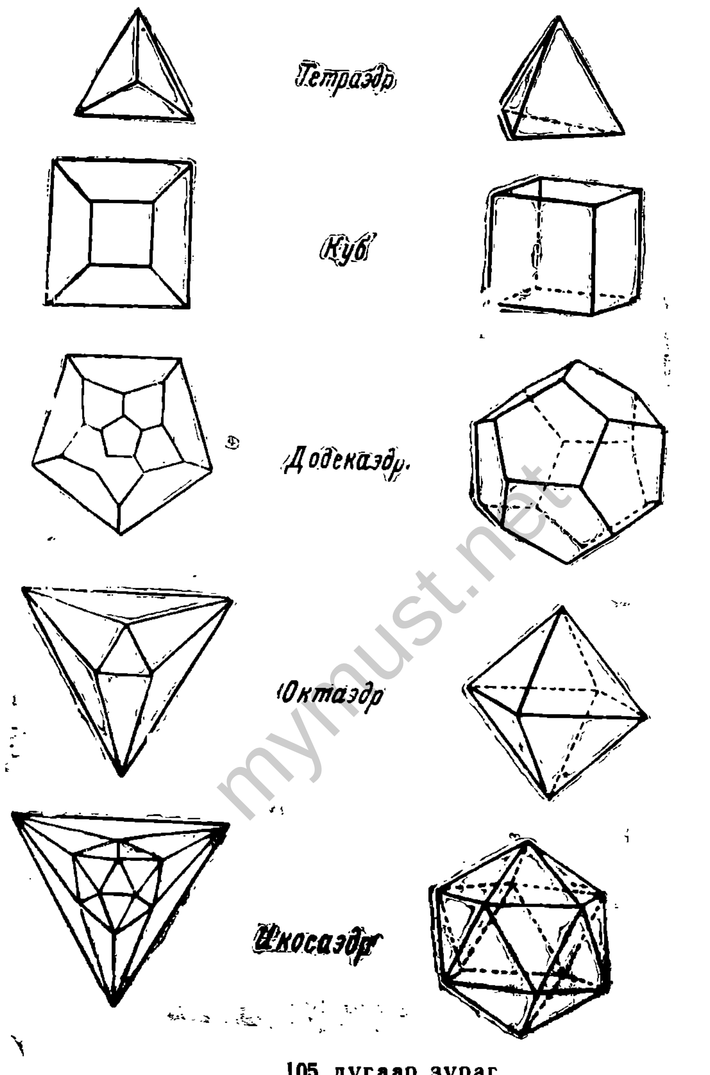
Хоёрдмол графын тодорхойлолтоос үзвэл зөв графын хоёрдмол граф нь мөн зөв граф байна. Манай хүснэгтээс харвал октаэдр нь кубын хоёрдмол, икосаэдр нь додекадрийн хоёрдмол, харин тетраэдр нь өөрөө өөрийнхөө хоёрдмол граф байх нь илт.

(8) тэнцэл биший хангадаг эерэг бүхэл ρ ба ρ^* тоонуудыг тодорхойлохдоо зөвхөн $\rho>2$ ба $\rho^*>2$ утгуудыг авч үзэж дээрх хүснэгтэд дурдсан үр дүнд бид хүссэн билээ. Нөгөө талаас ρ (эсвэл ρ^*) нь 2 юмуу 1 гэсэн утгыг авахад ч энэ тэнцэл биш шийдтэй байна. Энд харгалзах графууд нь маш хялбархан хэлбэртэй байна.

Хэрэв $\rho=2$ бол орой бүр дээр нь хоёр ирмэг ирсэн холбоост граф буюу товчоор хэлбэл эхний цикл (106 дугаар зураг) гарна.

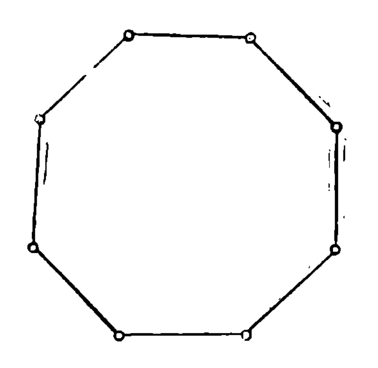
Хэрэв $\rho^*=2$ бол (7) тэнцэл нь

$$b(2\rho+4-2\rho)=4b=8$$

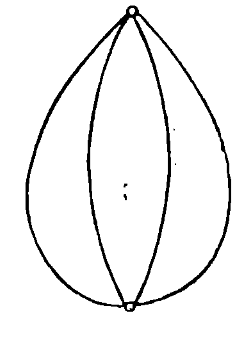


105 дугаар зураг

хэлбэртэй болж $b=2$ гарна. Энэ тохиолдолд граф нь хоёр оройг холбосон хэд хэдэн ирмэгээс тогтоно (107 дугаар зураг). Хоёр талс n орой ба n ирмэгтэй циклийн хоёрдмол граф нь хоёр орой, n талс, n ирмэгтэй байна гэдгийг тэмдэглэе. өөр үгээр хэлбэл бие биен-



106 дугаар зураг



107 дугаар зураг

дээ хоёрдмол тийм графуудыг 106 ба 107 дугаар зургууд дээр дүрсэлжээ.

$\rho=1$ үед (8) тэнцэл бишийг ρ^*-ийн дурын эерэг утг хангана. (Үүнийг шалга). Орой бүр дээрээ ганц ирмэгтэй холбоост граф нь зөвхөн нэг ирмэгтэй байх ёстой буюу өөрөөр хэлбэл

$$b=2,\ p=г=1,\ \rho=1,\ \rho^*=2$$

байх ёстой байна.

$\rho^*=1$ үед граф нь ганц гогцооноос тогтох ба түүний хувьд

$$b=p=1,\ г=2,\ \rho=2,\ \rho^*=1$$

байхыг хялбархан шалгаж болно.

Евклидийн «эхлэл»-ийн 13 дугаар номонд ***зөв олон талстын*** сургаалыг тайлбарлаж бичсэн байдаг. Эдгээр олон талстуудыг бөмбөрцөгт багтааж болох ба тийм олон талст нэг бүрийн талстууд нь хоорондоо тэнцүү зөв олон өнцөгтүүдээс тогтох бөгөөд орой бүр дээр нь нэг ижил тооны ирмэг ба талстууд нийлсэн байна. Тийм олон талстын оройнууд ба ирмэгүүдээс бүрдсэн граф нь зөв граф байна. Түүнийг бөмбөрцгийн төвөөс бөмбөлөг дээр проекцолж болох учраас энэ нь хавтгай граф байна.

Timaeus гэдэг зохиолдоо Платон зөв олон талстуудын тухай дурдсан байдаг. Платоны нөлөө асар их байсан учраас одоо ч гэсэн эдгээр талстуудыг Платоны биеүүд гэж нэрлэнэ. Евклид ч чухамдаа зөв олон талстуудыг анх нээсэн юм бишээ. Зөв олон талстуудыг Евклидийн өмнөх үеийн хүмүүс мэддэг байв. Зарим зөв олон талстуудыг пифагорчууд мэддэг байжээ.

Эрт ба дундат зууны үед зөвхөн олон талстуудыг орчлон ертөнцийн зохицлын билэг тэмдэг гэж үзэж байжээ[1]. 105 дугаар зураг дээр дүрсэлсэн таван графаас өөр ямар ч зөв граф байхгүй гэдэг нь бидний хийсэн өмнөх судалгаанаас харагдаж байна.

Дасгал

1. Тетраэдр, куб ба октаэдруудын хоёрдмол графуудыг зур.

2. Зөв олон талст бүхэнд Гамильтоны шугам байх уу

5§. Шигтгэмэл

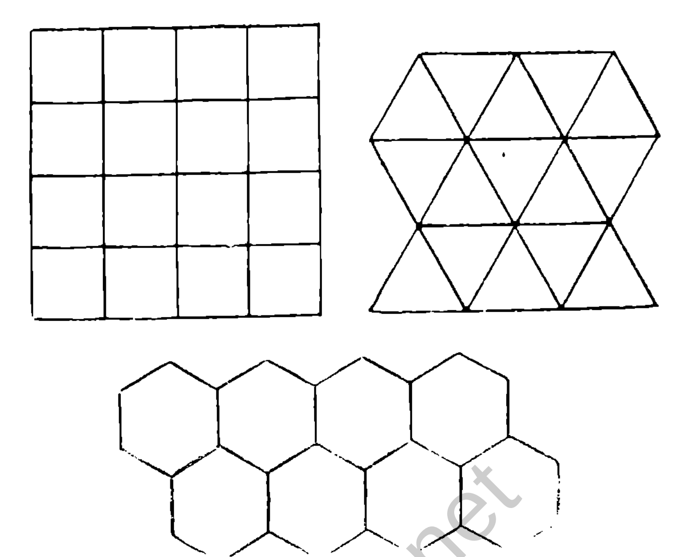
Хэрэв угаалгын өрөөний шалыг ашиглавал зөв олон өнцөгтүүд давтагдсан хээ байхыг харж болно. Энэ олон өнцөгтүүд нь элдэв хэлбэртэй байж болно. Тэдгээр нь квадрат юмуу гурвалжин эсвэл зургаан өнцөгтүүд байж болно (108 дугаар зураг).

Шигтгэмэл шаланд ийм хээнүүдийг хэрэглэх явдал эрт дээр цагаас ихэд дэлгэрчээ. Төсөөтэй юмуу яг ижил нүднүүд давтагдсан хээ байгаль дээр олонтоо тохиолддог. Ургамал судлалд навч, нахиа, үрийн байрлалыг авч үзэхэд ийм хээнүүд олон тааралддаг. Ананас (хан боргоцой)-ийн гадаргуу юмуу наран цэцгийн үрүүд ийм зөв байрлалтай байдгийг та нар ажигласан байх

Талс бүхэн нь нэг ижил тооны ирмэгтэй, эдгээр талстууд нь олон удаа давтагддаг хавтгай граф гэж

108 дугаар зураг

[1] Жишээлбэл И. Кеплер ингэж үзэж нарны аймгийн гаригуудын параметрүүдийг тодорхойлохтой холбогдсон нилээд эргэлзээтэй тооцооллынхоо үндсэнд эдгээр биетүүдийг авчээ.



иймэрхүү хээнүүдийг графын онолын үүднээс үзэж болно. Чухамдаа ийм хээнүүд тийм олон янз байж болохгүй гэдгийг одоо бид үзүүлье. Өмнө хэрэглэж байсан тэмдэглэлүүдийг энд хэрэглэе. Графын орой бүр дээр ρ ирмэг нийлдэг ба талс бүр нь ρ^* ирмэгүүдээр хязгаарлагддаг юм гэж үзье. Бид шигтгэмлийг хийхдээ шалыг ердийн зүйдэг маягаар аль нэг талаас эхэлж түүнд бусад талстуудыг нэмж хавтгайн ямар нэгэн хэсгийг бүрхүүлэв гэж бодъё.

Тэгвэл хязгааргүй талсаас бусад бүх талсууд нь ρ^* ирмэгээр хязгаарлагдсан бөгөөд F_∞ талсын хил дээр оршоогүй орой бүр дээр нь ρ ирмэг нийлсэн хавтгай G граф гарна.

Хил дээрх оройнуудын b_1 тоог нийт оройнуудын b тоонд харьцуулсан харьцаа нь улам улам бага болохоор хэсгүүдийн тоог улам олшруулан шигтгэмлий- үргэлжлүүлэв гэж бодъё. Хязгаарын онолын нэр томьёогоор

$$\text{хэрэв } b \to \infty \text{ бол } \frac{b_1}{b} \to 0 \qquad (9)$$

гэж үзэж болно. Өөрөөр хэлбэл хэрэв b нь хязгааргүй рүү тэмүүлбэл $\frac{b_1}{b}$ бутархай тэг рүү тэмүүлнэ гэж хэлж болно. (3) томьёог ашиглан орой бүр дээрх ирмэгүүдийн тоог тус тусад нь тоолж G графын ирмэгийн тоог үнэлье. Хэрэв графын орой бүр дээр яг ρ ирмэг нийлдэг байсансан бол нийт ирмэгийн тоо нь $\frac{1}{2}\rho b$-тэй тэнцүү байхсан билээ. Хэрэв бид хилийн оройнууд дээрх ирмэгүүдийг тоолохгүй бол $\frac{\rho}{2}(b-b_1)$ ирмэг гарна. Ийм учраас

$$\rho b-\rho b_1<2p<\rho b$$

байна. Үүнд p нь G графын ирмэгийн тоо болно. Энэ тэнцэл бишүүдийг

$$\frac{\rho}{2}-\frac{\rho}{2}\cdot\frac{b_1}{b}<\frac{p}{b}<\frac{\rho}{2}$$

хэлбэртэй бичиж болно.

$$\text{Хэрэв } b\to\infty \text{ бол } \frac{p}{2}\to\frac{\rho}{2} \qquad (10)$$

гэж (9)-ээс дүгнэлт хийж болно. Одоо (5) томьёогоор графын ирмэгийг тооцоолъё. ρ^* ирмэгээр хязгаарлагдсан $г-1$ ширхэг талс байх ба F_∞ талыг хязгаарлаж буй ирмэгийн тоо нь графын хилийн b_1 оройн тоотой тэнцүү байна. Ийм учраас

$$2p=(г-1)\rho^*+b_1$$

Энэ тэнцлийн хоёр талыг $b\rho^*$-д хуваавал

$$\frac{г}{b}=\frac{2}{\rho^*}\frac{p}{b}+\frac{1}{b}-\frac{b_1}{\rho^* b}$$

гэж бичиж болно. Хэрэв $b\to\infty$ бол баруун талын сүүлийн хоёр гишүүн тэг рүү тэмүүлэх ба хэрэв $b\to\infty$ бол (10)-аас

$$\frac{\partial}{b}\to\frac{2}{\rho^*}\frac{\rho}{2}=\frac{\rho}{\rho^*}$$

гэж мөрдөн гарна. Одоо Эйлерийн (2) томьёог

$$1+\frac{\partial}{b}=\frac{p}{b}+\frac{2}{b}$$

гэж бичье. b-г өсөхөд (11) ёсоор тэнцлийн зүүн тал нь $1+\frac{\rho}{\rho^*}$ рүү тэмүүлэх ба харин (10) ёсоор баруун тал нь $\frac{\rho}{2}$ рүү тэмүүлнэ. Нэгний тэнцлийн хоёр тал нэг ижил хязгаартай байх учраас

$$1+\frac{\rho}{\rho^*}=\frac{\rho}{2}$$ болно.

Эндээс

$$(\rho-2)(\rho^*-2)=4$$

гарна. Энэ тэнцлийг зөвхөн

$\rho=3,\ \rho^*=6,\quad \rho=4,\ \rho^*=4,\quad \rho=6,\ \rho^*=3$

гэсэн бүхэл хос тоонууд л хангана. Ийм учраас хавтгай графын давтагдсан хээ буюу шигтгэмэл нь нэг бол гурвалжнуудаас, нэг бол дөрвөн өнцөгтөөс, нэг бол зургаан өнцөгтүүдээс бүрдэж байх болно. Энэ бүх тохиолдлуудыг 108 дугаар зураг дээр дүрслэв.

IX БҮЛЭГ

ГАЗРЫН ЗУРАГ БУДАХ

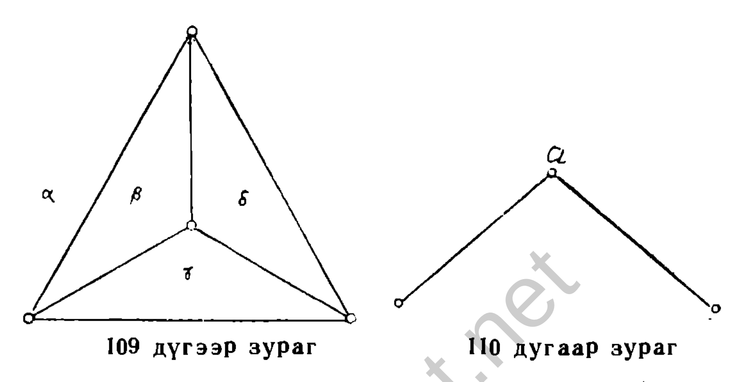
1 §. Дөрвөн будгийн тухай асуудал

Талстуудыг нь улс орнууд харин хязгааргүй талсыг нь далай гэж бодож олон өнцөгт граф бүрийг газрын ямар нэг зураг юм гэж төсөөлж болох юм. Тийм зурагт далай, бүх улс орныг бие биеэсээ ялгагдаж байхаар буддаг. Ингэж будахдаа ерөнхий хилтэй орнуудыг ялгаатай өнгүүдээр будах ёстой. Хэрэв бидний мэдэлд хүрэлцэхүйц тооны будаг байвал ингэж будах нь тийм ч хэцүү зүйл биш. Харин өгөгдсөн зургийг ингэж будахад доор хаяж хэдэн өнгийн будаг хэрэгтэй вэ? гэдэг асуудлыг тогтоох нь нэн төвөгтэй асуудал юм.

Зохих шаардлаганд тохируулан *дөрвөн өнгийн будгаар газрын зураг бүхнийг будаж болно байх гэсэн таамаглал* өргөн дэлгэрчээ. Графын онолын анхны судлаачдын нэг Британы математикч А. Кэлигийн дөрвөн будгийн тухай 1879 онд бичсэн өгүүлэл нь хааны газар зүйн нийгэмлэгийн бүтээлийн нэгдүгээр ботид орсон нь чухамдаа зүйтэй явдал болжээ. Энэ өгүүллийг дөрвөн будгийн асуудлын «төрсний гэрчилгээ» гэж олонтой ярьдаг. Энэ нь чухамдаа тийм биш байжээ. Шотландын физикч Фредерик Гүтригийн ярьснаар бол энэ асуудал 1850 оны үед Лондоны математикч-оюутнуудын дунд нилээд дэлгэрсэн байснаас гадна түүний ах Фрэнсис Гүтри нь өөрийнхөө математикийн багш А. Де. Морганы анхаарлыг энэ асуудалд хандуулж байсан байна.

Энэ асуудал эхэндээ тийм хэцүү асуудал гэж тооцогдсонгүй. Математикчид түүнийг бараг илэрхий зүйл гэж үзэж байсан байх. Дараа нь хэд хэдэн буруу батал-

гаа гарч иржээ. Дөрвөн будгийн бодлого нь хялбархан томьёогоороо будилуулж хамгийн их нэртэй математикчдын хүчин чармайлтанд ч автсангүй. Энэ асуудалтай холбогдон графын онолыг сонирхох явдал ихэссэн нь уул онолд олон чухал үр дүн нээхэд нэмэр болсон бөгөөд энэ үр дүнгүүд нь дөрвөн будгийг асуудлыг шийдвэрлэхэд тустай мэт санагдуулж байжээ.



109 дүгээр зураг **110 дугаар зураг**

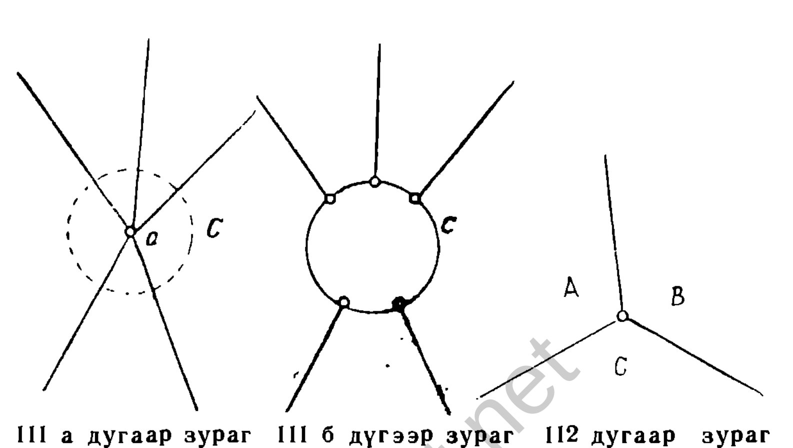
Зарим нэг графыг будахад үнэндээ бидэнд дөрвөн будаг байх нь чухал гэдгийг тэмдэглэе (109 дүгээр зургийг хар). Бид янз бүрийн өнгүүдийг α, β, γ, δ, ε, . . . гэж грек үсгүүдээр тэмдэглэж байх болно. Чухам ямар үсгээр ямар өнгийг тэмдэглэх нь бидэнд онцын ач холбогдолгүй байх нь мэдээж юм. Тетраэдрийн гадна талын муж буюу төгсгөлгүй талсыг нь α өнгөөр буджээ, гэж саная. Тэгвэл бусад гурван талс нь бие биетэйгээ хил нийлсэн учраас тэдгээр нь өөр өөр өнгөөр (тэгэхдээ α-аас ялгаатай) будагдсан байх ёстой.

Газрын зургийг аль болох цөөн будгаар будах тухай асуудлыг шийдвэрлэхдээ энэ зурагт зөвхөн хоёр ирмэг нийлсэн тийм оройнууд үгүй байж гэж үзэж болно. Үнэндээ хэрэв a нь тийм орой бол зургийг будах схемийг (загвар) өөрчлөхгүйгээр тэр орой дээр нийлсэн хоёр ирмэгийг нийлүүлж уул a-оройг зайлуулж болно (110 дугаар зураг).

Ийм учраас орой бүр дээр нь гурваас доошгүй ирмэг нийлсэн тийм графуудыг авч үзэхэд л хангалттай юм.

Мөн үүнээс ч илүү хатуу шаардлага тавьж болно. Үүнд: Олон өнцөгт дурын графыг ямар нэг тодорхой тооны

өнгөөр будах асуудлыг уул граф нь *гурван зэргийн нэг төрлийн граф* буюу өөрөөр хэлбэл орой бүр дээр нь яг гурван ирмэг нийлдэг тийм графыг будахад шилжүүлж болно.



111 а дугаар зураг 111 б дүгээр зураг 112 дугаар зураг

Өөр үгээр хэлбэл хэрэв бид будах тухай бодлогыг нэг төрлийн гурван зэргийн графын хувьд шийдвэрлэж чадвал тэр бодлогыг дурын графуудын хувьд шийдвэрлэж чадна. Үнэндээ ямар нэг a орой дээр гурваас илүү ирмэг нийлсэн байж гэж үзье. (111 a дугаар зураг). a төвтэй бөгөөд бусад аль ч оройд хүрэхгүй тийм жижиг C тойргийг татъя. a орой ба түүн дээр нийлсэн ирмэгүүдийн тойрог доторхи хэсгүүдийг авч хаяад тэдний оронд тойргийг нумуудыг ирмэг болгон авч үзье (111 дүгээр зураг). Шинэ орой нэг бүр дээр гурван ирмэг нийлнэ. C тойргийг цэгт хумих замаар шинэ G_1 графын будалт бүрээс анхны G графын будалтыг гаргаж болно. Дээр нь гурваас илүү ирмэг нийлсэн орой бүр дээр ийм байгуулалтыг хийвэл зургийг будах тухай манай бодлого нь нэг төрлийн гурван зэргийн олон өнцөгт графыг будах бодлогод шилжинэ.

Иймд бид цаашдаа гурван зэргийн нэгэн төрлийн графуудыг авч үзэх болно. VIII бүлгийн 3 §-д гаргасан томьёонуудад нэмэлт болдог нэг чухал томьёо гурван зэрэгт графын хувьд байдаг гурван зэрэгт графын орой бүр нь гурван талст хамаардагт энэ томьёо үндэслэгдэнэ. Иймучраас бүх талстууд дээрх оройнуудыг тоол-

бол бүх оройн тоог гурав дахин авсантай тэнцэнэ. l ирмэгтэй ийм учраас i оройтой талстуудын тоог φ_i -ээр дээр тэмдэглэж байсны адилаар тэмдэглэе. Тэгвэл

$$3b = 2\varphi_2 + 3\varphi_3 + 4\varphi_4 + 5\varphi_5 + 6\varphi_6 + 7\varphi_7 + \ldots \qquad (1)$$

тэнцэл гарна. (1) тэнцлийг 2-оор, VIII бүлгийн (5) ба (4) тэнцлүүдийг харгалзан 3 ба 6-гаар үржүүлбэл

$$6b = 4\varphi_2 + 6\varphi_3 + 8\varphi_4 + 10\varphi_5 + 12\varphi_6 + 14\varphi_7 + \ldots$$
$$6p = 6\varphi_2 + 9\varphi_3 + 12\varphi_4 + 15\varphi_5 + 18\varphi_6 + 21\varphi_7 + \ldots$$
$$6г = 6\varphi_2 + 6\varphi_3 + 6\varphi_4 + 6\varphi_5 + 6\varphi_6 + 6\varphi_7 + \ldots$$

гэсэн гурван тэнцэл гарна. Эйлерийн (2) томьёог

$$12 = 6b - 6p + 6г$$

хэлбэрээр бичиж дээр олсон утгуудыг орлуулъя. Үүний дүнд

$$12 = 4\varphi_2 + 3\varphi_3 + 2\varphi_4 + \varphi_5 - \varphi_7 - 2\varphi_8 - \ldots \qquad (2)$$

гарах ба энд бичигдээгүй бүх гишүүд нь сөрөг тэмдэгтэй байна. (2) тэнцлийн баруун тал нь эерэг байх ёстой учраас бид доорх дүгнэлтийг хийж болно.

Гурван зэргийн нэг төрлийн граф нь зургаагаас цөөн ирмэгээр хязгаарлагдсан талсыг заавал агуулна.

2 §. Таван будгийн тухай теорем

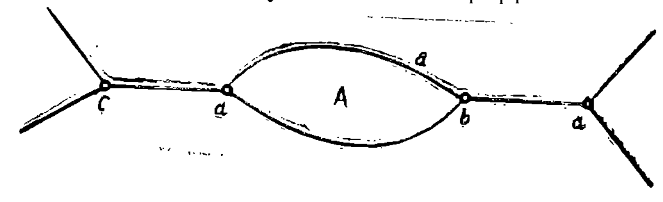
Бид энэ зүйлд графыг дөрөв юмуу таван будгаар будах тухай бодлогыг авч үзнэ. Тэгэхдээ зургаагаас цөөн ирмэгээр хязгаарлагдсан талсыг ядаж нэгийг агуулсан нэг төрлийн гурван зэргийн олон өнцөгт графуудыг авч үзэх явдлаар хязгаарлаж болохыг өмнөх зүйлд үзүүлсэн билээ. Граф хоёр, гурав, дөрөв ба таван ирмэгээр хязгаарлагдсан талс байх тохиолдлуудыг бид тус тусад нь авч үзье.

а) Анхныхаасаа цөөн тооны талстай гурван зэргийн нэг төрлийн граф гардаг байхаар зарим нэг хилүүдийг орхиж болно.

б) Хэрэв энэ гарсан граф нь таваас илүүгүй будгаар будагдаж болдог бол мөн анх авсан графыг ч ингэж будаж болдог гэдгийг бид дээрх тохиолдол тус бүрийн хувьд үзүүлнэ. Нэгэнт энэ шинэ граф нь бас л нэг төрлийн гурван зэргийн граф байх учир тийм хялбарч-

лалт бүрийн дараа зургаагаас цөөн ирмэгээр хязгаарлагдсан талс дахиад л олдоно. Ийм хялбарчлалтаар улам улам цөөн будагдвал зохих талс бүхий графуудыг дараалан гаргаж авна.

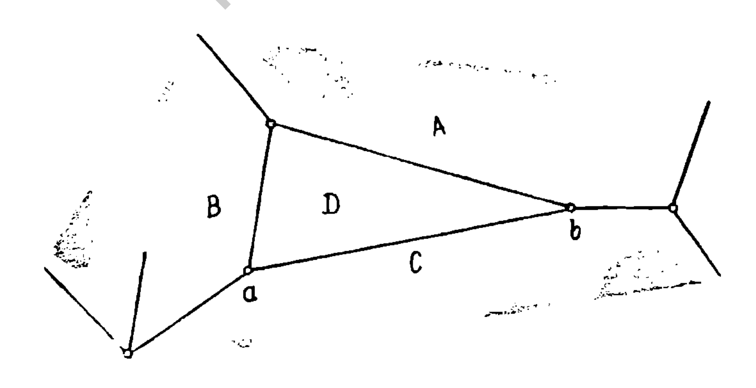
Давхар ирмэгүүд а) G-графыг хоёр ирмэгээр хязгаарлагдсан талс агуулахгүй болтол нь ямагт хялбарчилж болно гэдгийг юуны өмнө бид үзүүлье.



113 дугаар зураг

Хэрэв a ба b оройнуудын хооронд 113 дугаар зураг дээрх шиг давхар ирмэг байсан бол эдгээр ирмэгүүдийн нэгийг нь зайлуулж үлдсэн ирмэгий нь (a, c) ба (b, d) ирмэгүүдтэй нэгтгэн тэднийг ганц (c, d) ирмэгээр сольёо. Шинэ G_1 граф нь бас л нэг төрлийн гурван зэргийн граф болно.

б) Хэрэв G_1 графыг будаж болдог бол (c, d) ирмэгийн хоёр талд α ба β гэсэн хоёр өөр өнгө байх болно.



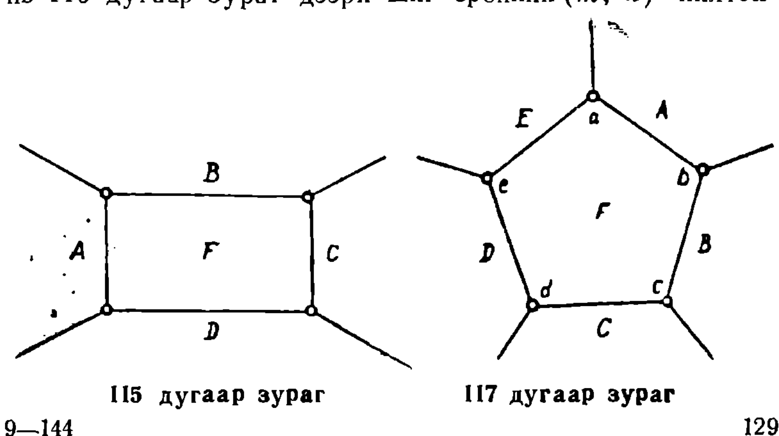
114 дүгээр зураг

Тэгвэл бид a ба b оройнууд ба хоёрдох (a, в) ирмэгийг буцааж байранд нь тавиад A талсыг гуравдахь γ өнцгөөр будаж болно.

Гурвалжин талс. а) Авч үзэж буй графыг гурвалжин талс агуулаагүй болтол нь хялбарчилж болно. D нь A, B, C гурван өөр талстай хиллэсэн тийм талс болог. (a, b) нь C ба D талсын хилийн ирмэг (114 дүгээр зураг) болог. (a, b) ирмэгийг зайлуулаад a дээр нийлсэн үлдсэн хоёр ирмэгийг нь нэг ирмэгт нэгтгэе. Мөн ийм ажиллагааг b орой дээр хийе. Гарсан G_1 граф нь нэгэн төрлийн гурван зэргийн граф байна.

б) Хэрэв G_1 графыг зохих ёсоор будаж болбол A талс нь ямар нэг α өнгөөр B нь β өнгөөр $C+D$ талс нь γ өнгөөр будагдана. (a, b) ирмэгийг буцааж тавиад D талсыг бид дөрөв дэх δ өнгөөр будаж болно. Дөрвөн өнцөгт талс а) Дөрвөн ирмэгээр хязгаарлагдсан талсыг зайлуулж болно гэдгийг үзүүлэх нь арай төвөгтэй. F нь A, B, C, D талстуудтай хиллэсэн (115 дугаар зураг) тийм талс болог.

Тэгвэл нэг ижил талсын хэсэг болдоггүй ба хоорондоо хиллэдэггүй хос эсрэг, жишээлбэл, B ба D (эсвэл A ба C) талсууд олдоно. Үнэндээ хэрэв жишээлэхэд A ба C нь нэг ижил талсын өөр хэсгүүд юмуу эсвэл тэдгээр нь 116 дугаар зураг дээрх шиг ерөнхий (m, n) хилтэй

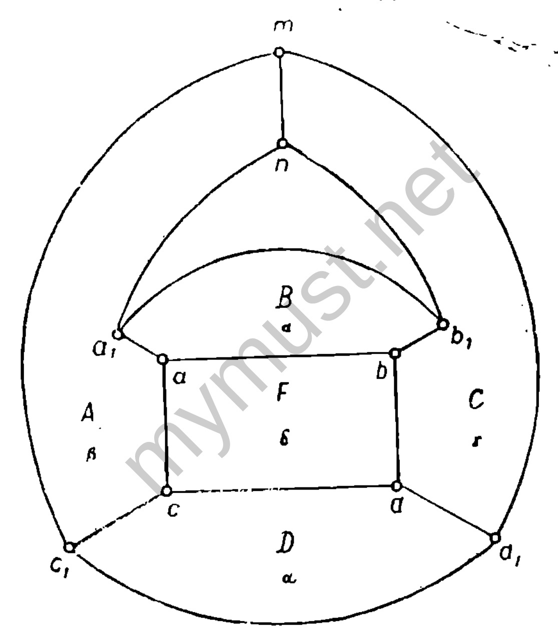


115 дугаар зураг

117 дугаар зураг

байсан бол B талс нь D талстай ерөнхий хилтэй байж чадахгүй. Тэгвэл (a, b) ба (c, d) ирмэгүүдийг зайлуулаад $(a_1\ a)$ (a, c), (c, c_1) ирмэгүүдийг нэг (a_1, c_1) ирмэгтэй нэгтгэе. Үүний адилаар (b_1, b), (b, d), (d, d_1) ирмэгүүдийг нэг (b_1, d_1) ирмэгт нэгтгэе. Шинэ G_1 граф нь нэг төрлийн гурван зэргийн граф ба $B+F+D$ нь түүний нэг талс юм.

б) G_1 граф нь зохих ёсоор будагдсан ба $B+F+D$ талс нь α өнцөгтэй байж гэж бодъё. Тэгвэл A ба C



116 дугаар зураг

талс нь ямар нэг β ба γ өнцөгтэй юмуу нэг ижил өнгөтэй байж чадахгүй. Одоо (a, b) ба (c, d) хоёр ирмэгийг буцааж тавьж F талсыг бид дөрөв дэх δ өнгөөр будна.

Таван өнцөгт талс а) F талс нь 117 дугаар зураг дээрх шиг A, B, C, D, E таван талстай хиллэдэг юм гэж үзье. Ерөнхий хилгүй, нэг талсын хэсгүүд болдоггүй

бөгөөд F талстай хиллэдэг, зэрэгцээ хос, жишээлэхэд A ба C талс энд мөн олдоно. Тэгвэл (a, b) ба (c, d) ирмэгүүдийг зайлуулаад a, b, c, d оройнуудыг (117 зургийг үз). Энэ орой бүр дээр үлдсэн хоёр ирмэгтэй нэг ирмэг болгон нэгтгэвэл дахиад л нэг төрлийн гурван зэрэгт граф гарна.

б). Энэ гарсан граф нь зохих ёсоор будагдсан бөгөөд тэгэхдээ $A+F+C$ талс нь α өнгөтэй болсон юм гэж үзье. B, D, E гурван талсын хувьд β, γ, δ гэсэн гурван өөр өнгө шаардагдаж болно. Хэрэв бидэнд таван будаг байсан бол (a, b) ба (c, d) ирмэгүүдийг буцааж тавиад F талсыг тавдахь ε өнгөөр будаж болно. Харин хэрэв бидэнд зөвхөн дөрвөн будаг байсан бол үүнийг тэр болгон хийж чадахгүй.

Хэрэв нэг төрлийн граф нь хоёр, гурав, дөрөв, таван ирмэгээр хязгаарлагдсан талстуудтай ба бидний мэдэлд таван будаг байсан бол ийм графыг будах тухай бодлогыг цөөн тооны талстай графыг будах бодлогод ямагт шилжүүлж болохыг бид ийнхүү үзүүллээ. Нэг төрлийн граф дотор дор хаяж нэг цөөн тооны ирмэгтэй талс агуулсан байх ёстойг өмнөх зүйлийн эцэст үзүүлсэн тул графыг ингэж эмхтгэх ажиллагааг таваас илүүгүй талстай болтол үргэлжлүүлж болох учир таваас илүүгүй будгаар лав будаж болно. Ийнхүү дараахь теоремыг батлав.

Т а в а н б у д г и й н т у х а й т е о р е м. *Хавтгай дурын графыг таван будгаар будаж болно.*

Бидэнд зөвхөн дөрвөн будаг байх тохиолдолд энэ теоремийн баталгааг хэрэглэж болохгүй. Бидний дээр үзсэнээр энэ тохиолдолд таван өнцөгтүүдийг зайлуулж чадахгүй. Талс бүр нь таваас цөөнгүй ирмэгээр хязгаарлагдсан ямар нэг төрлийн графад хүрээд манай нэгтгэх процесс дуусаж болно. Энэ графад хоёр, гурав ба дөрвөн ирмэгээр хязгаарлагдсан талстууд байхгүй учир

$$\varphi_2=\varphi_3=\varphi_4=0 \text{ байна.}$$

Иймд цаашид эмхтгэгдэхгүй нэг төрлийн граф ядаж 12 таван өнцөгтийг агуулсан байх ёстой (2) томьёо харуулж байна.

39-өөс цөөн тооны талстай дурын зургийг үнэн хэрэг дээрээ дөрвөн будгаар будаж болдог нь батлагджээ. Тооцон бодох машины манай зууны хувьд энэ зааг нь хэтэрхий өндөр зааг ч биш ээ. Хэрэв хэн нэгэн хүн энэ бодлогыг программчлах арга бодож олоод энэ бодлогыг тооцон бодох машинаар бодуулбал дээрх хилийг асар холдуулж чадах ба магадгүй дөрвөн будгаар бодогддоггүй ямар нэг зургийг олчихыг хэн байг гэх вэ? Гэвч энэ нь үнэмшихэд бэрх зүйлээ. Тийм зургийн хувьд олон янзын хязгаарлалтууд тавигдах учир тийм зураг оршин байх нь маш сэжигтэй зүйл юм. Хэрэв дөрвөн будгийн асуудалтай холбогдсон олон тооны ажлуудын тухай бид ярих гэвэл дахиад л ийм хэмжээний ном хэрэгтэй учир энэ асуудалтай та бүхнийг танилцуулснаараа сэтгэл ханаад зогсохоос аргагүй юм.

Дасгалын шийд

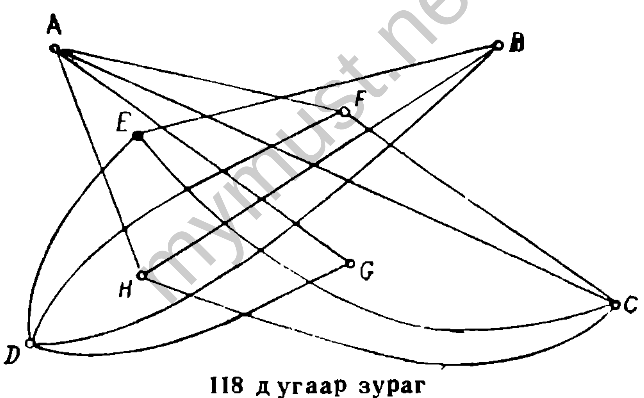
I БҮЛЭГ

1 §. -р хуудас

2. AB, AE, AD, BC, BG, BF, CD, CG, DH, EH, EG, EF, FH, FG, GH.

3. 9 ирмэг, 6 оройтой; 15 ирмэг, 8 оройтой

2 §. 9-р хуудас



118 дугаар зураг

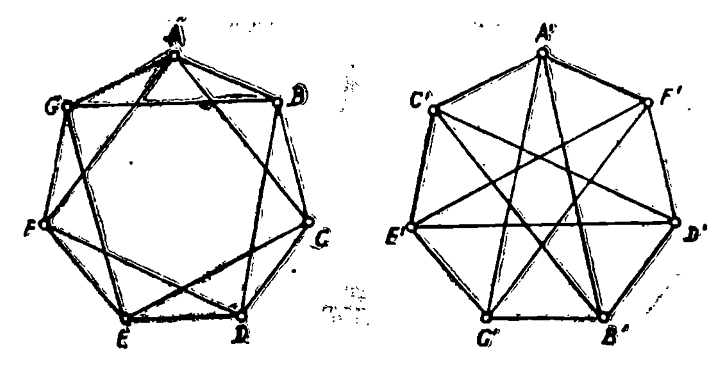
2. $\frac{1}{2}n(n-1)$

3 §.

1. 2-р зураг дээрх G графад таван ирмэгтэй орой байхад тийм орой 1-р зураг дээрх графад байхгүй учир 1 ба 2-р зураг дээрх графууд изоморф биш. 6-р зураг дээрх граф us ганц ирмэгтэй F-оройтой учир 1-р хуудас дээрх графтаф изоморф биш. Мөн тийм шалтгаанаар 6-р дээрх граф нь 2-р зураг дээрх графтай изоморф биш.

2. Нэгдүгээр графын (5,8) ирмэг нь 4 урттай хоёр циклд хамаарах ба харин хоёрдугаар графад тийм ирмэг байхгүй.

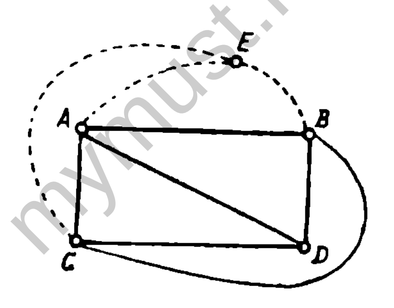
3. Оройнуудын зохих харгалзааг зураг дээр дүрслэв.



119 дугаар зураг

5 §.

I ба 2. Эхний дөрвөн хөршийг A, B, C, D гэж тэмдэглээ. Тэдний замууд нь зураг дээрх хавтгай графыг үүсгэж байг. Тавдахь E цэгийг хаана ч байрлуулсан ч тэр нь бусад цэгүүдээсээ ямар нэг битүү муруйгаар таслагдана.



120 дугаар зураг

6 §

1. 2 дугаар зураг дээр

$$\rho(A) = \rho(c) = \rho(D) = 3; \quad \rho(G) = 5$$

$$\rho(B) = \rho(E) = \rho(F) = \rho(H) = 4.$$

тул графын ирмэгийн тоо нь $\frac{1}{2}(3\cdot3 + 4\cdot4 + 5) = 15$—тэй тэнцүү байна. 6 дугаар зураг дээр

$$\rho(A) = \rho(B) = \rho(D) = \rho(E) = 2 \; \rho(c) = 3, \; \rho(F) = 1$$

нийт ирмэгийн тоо нь $\frac{1}{2}(4\cdot2 + 3 + 1) = 6$-тэй тэнцүү байна.

2. Эдгээр нь харгалзан 4 ба 2 сондгой оройтой байна.

II БҮЛЭГ

4 §.

1,28 дугаар зураг дээрх граф тус бүрт хоёр хоёр ирмэгтэй орой байх учир эдгээр граф тус бүрийг ганц гинжээр бүрхэж болно. U_4-графыг 1,2 3,4 ба 2,4, 1,3 гэсэн хоёр гинжээр бүрхэж болно. Харин U_5 граф нь ганц 1, 2, 3, 4, 5, 1, 4, 2, 5, 3, 1-гинжээр бүрхэгдэнэ.

5 §.

1. Нэгдүгээр граф нь $A\,C\,B\,F\,E\,D\,A$ гамильтоны шугамтай ба хоёрдугаар нь $A\,B\,F\,E\,H\,G\,C\,D\,A$ гамильтоны шугамтай.
2. Хамгийн богино $A_1\,A_2\,A_4\,A_3\,A_1$ гинж нь 470 урттай байна.

6 §.

1. Хэрэв нүүдлийн чиглэлийг анхаарвал 336 нүүдэл байх, эсрэг тохиолдолд 168 нүүдэл бий.
2. Гурван нүүдэлтэй булангийн 4 буудал, таван нүүдэлтэй захын 24 буудал, найман нүүдэлтэй төвийн 36 буудал бий.

III БҮЛЭГ

2 §.

1. Эдгээр графын цикломатик тоонууд нь харгалзан

$$\gamma = 15 - 8 + 1 = 8 \text{ ба } \gamma = 32 - 21 + 1 = 12$$

тэй тэнцүү байна.

2. $$\gamma = \frac{1}{2}(n-1)\,n - n + 1 = \frac{1}{2}(n-1)\,(n-2)$$

4 §.

1. I графын хувьд жишээлбэл
$A \to AC$, $B \to BE$, $C \to CB$, $D \to DA$, $E \to EF$, $F \to FA$.

2 дугаар зураг дээрх графын хувьд

$$A \to AB,\ B \to BC,\ C \to CD,\ D \to DA$$
$$E \to EF,\ F \to FG,\ G \to GH,\ H \to HG.$$

IV БҮЛЭГ

2 §.

1. Сурагч бүхэн тус тусад бүлгэм болно гэж үзвэл хамгийн бүдүүлэг жишээ гарна. Тэгвэл хэн нь ч ямар нэг өөр бүлгэмийн дарга болж чадахгүй.
2. Нийт бүлгэмийн тоо нь

$$\frac{12 \cdot 11 \cdot 10}{1 \cdot 2 \cdot 3} = 220$$

тэй тэнцүү. Энэ нь боломжит бүх дарга нарын тоо 12-оос олон дахин их байна.

3. Нэг буулгалт нь

$$m_1 \to p_2, \quad m_2 \to p_1, \quad m_3 \to p_4, \quad m_4 \to p_5$$

3 §.

2. 48 дугаар хүснэгтийн мөр бүр ба багана бүр нь 1-ээс N хүртлэх тоонуудыг яг нэг нэг удаа агуулдгаас а) ба б) чанарууд мөрдөн гарна. в) чанарыг батлахын тул уул хүснэгтийг ажиглая. Нэгдүгээр мөр ба нэгдүгээр баганаы тоолбол дараахь зохион байгуулалттай N мөр ба N багана байиа. Үүнд:

а) i дүгээр мөр ба i дүгээр баганы огтлолцол дээр байгаа тоо нь i дүгээр тоглогч 1-тэй учирсанд харгалзана.

б) Хэрэв $i \neq j$ бол i дүгээр мөр ба j дүгээр баганаы огтлолцол дээр байгаа тоо нь j дүгээр тоглогчдын

$$k = 2\,i - j + [\pm (N - 1)]$$

тэй тэнцүү дугаартай тоглогчтой учирсанд харгалзана. (Хэрэв шаардлага гарвал k тоог 2 ба N-ийн хооронд байлгахаар энд $N-1$ ийг нэмэх юмуу хасах болно) Эндээс j-г илэрхийлбэл

$$j = 2\,i - k + [\pm (-N\,1)]$$ болно.

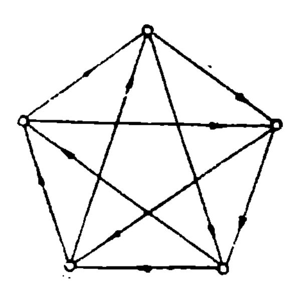
Энэ тохиолдолд k ба j тэгш хэмтэй орж байгаагаас в) чанар мөрдөн гарна.

V БҮЛЭГ

3 §.

2. $\rho(A) + \rho^*(A) + \rho_0(A) = k; \quad \rho(B) + \rho^*(B) + \rho_0(B) = k - 1$ гэж бичиж болно. Үүнд $\rho_0(A)$ нь тэнцээний тоо

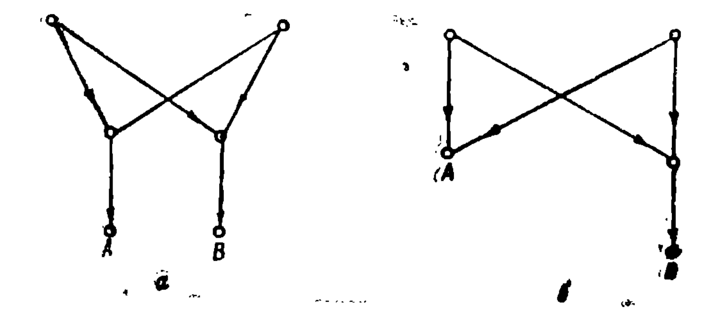
3. $n = 5$ үед дараахь граф гарна.



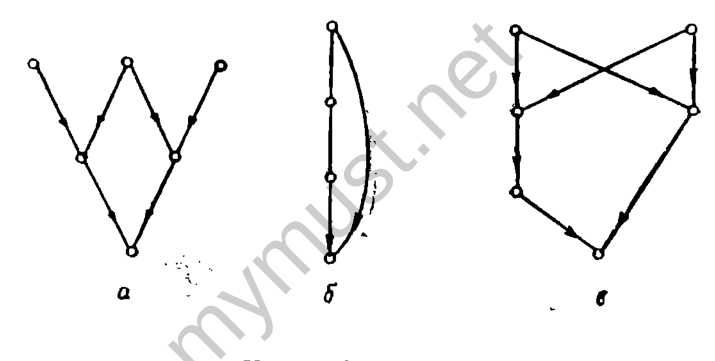
121 дүгээр зураг

4 §.

1. Энэ графууд дараахь хэлбэртэй байна.



2. Боломжийн нэг шийд нь 1 оройг 0 ангид хамааруулъя. Тэгвэл 2 ба 7 нь M ангид харин 5 нь 0 ангид хамаарах ёстой болно.

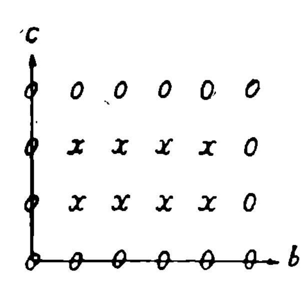


VI БҮЛЭГ

1 §.

1 ба 2. Бидний мэдэлд байгаа ганц хэмжих хэрэгсэл нь *B* ба *C* савууд өөрсдөө учраас зөвхөн эдгээр савуудын эсвэл нэг нь дүүрэн, эсвэл хоосон байх тохиолдолд л бид шингэний хуваарилалтыг үнэлж чадна. Шингэний тийм бүх хуваарилалтуудыг баруун талд дүрсэлсэн тэгш өнцөгтийн хил дээрх цэгүүдээр (жижиг дугуйгаар тэмдэглэсэн) дүрсэлжээ. *v* хуваарилалтуудын олонхийг энэ тэгш өнцөгтийн дотоод цэгүүдээр (*x* үсгээр тэмдэглэгдсэн) дүрслэв. Ямар нэг дотоод цэгт хамаарах хуваарилалт бидэнд өгсөн байж гэж саная. Тэгвэл дараагийн юүлэлтэнд шингэнийг яг хэмжих ганц арга нь нэг бол *B*, *C* савуудын нэгийг суллах, эсвэл нэгийг нь дүүргэх явдал юм. Аль ч тохиолдолд шингэний тийм юүлэлт нь графын хил дээрх ямар нэг цэгт хүргэнэ. Нэг бол дүүрэн сав, нэг бол хоосон сав бидэнд байх учраас дараагийн юүлэлт нь ядаж нэг сав нь эсвэл хоосон, эсвэл дүүрэн байх тийм хуваарилалтанд хүргэнэ. Өөр үгээр хэлбэл хилийн байрлалтаас

юүлэлт нь дахиад хилийн ямар нэг байрлалд шилжүүлэх учраас дотоод v цэгүүдэд хүрч чадахгүй.



3. (7,0), (3,4), (3,0), (0,3), (7,3), (6,4), (6,0)

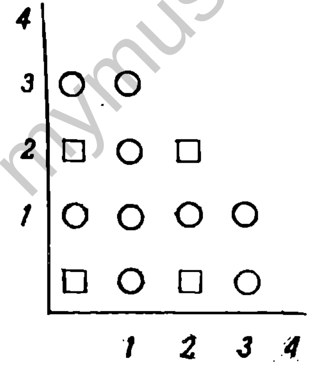
2 §.

2. $B_2(A_1) = (0,0,\ \alpha,\ \alpha \geqslant 1$; $\Pi_1\ (A_2) = (1,1,0)$

$B_2\ (A_1) = (0,\ 0,\ \alpha)\ (1,1,\ \beta)\ (0,1\ \gamma),\ \beta > 1,\ \gamma > 2.$

$\Pi_2\ (A_2) = (1,1,0),\ (0,2,2)$

3. Зураг дээр дугуйгаар A_1-ийн хожлын, квадратаар A_2-ийн хожигдлын, байрлалтуудыг тэмдэглэв.



$B_1\ (A_1) = (1,0),\ (0,1),\ (1,1)$

$\Pi_1\ (A_2) = (0,2),\ (2,0)$

$B_2\ (A_1) = (1,0),\ (0,1),\ (1,1),\ (3,0),\ (3,1)$

$\Pi_2\ (A_2) = (0,2),\ (2,0),\ (2,2)$

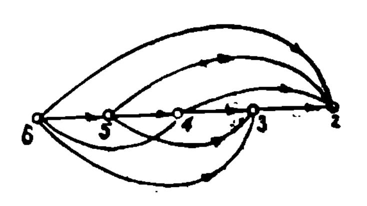
3 §.

Тэмцээн нь хоёр тийшээ чиглэлтэй ирмэгүүдээр дүрслэгдэх ёстой.

VII БҮЛЭГ

1 §.

1. Жишээлбэл „a нь b-гийн квадратаас их" гэсэн харьцаа юмуу „A ба B олонлогууд ерөнхий элементгүй" эсвэл, нэг гурвалжны нөгөөтэй огтлолцоно гэсэн харьцаануудыг ав.



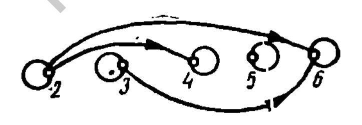
2. а).

$$R_6 = \{2, 3, 4, 5\}$$
$$R_5 = \{2, 3, 4\}$$
$$R_4 = \{2, 3\}$$
$$R_3 = \{2\}$$
$$R_2 = \{\varnothing\}$$

б) Энэ харьцаа нь 5 оройтой, гогцоогүй бүрэн графаар дүрслэгдэнэ.

$R_6 = \{2, 3, 4, 5\}$, $R_5 = \{2, 3, 4, 6\}$ $R_4 = \{2, 3, 5, 6\}$
$R_3 = \{2, 4, 5, 6\}$, $R_2 = \{3, 4, 5, 6\}$

в). $R_6 = \{6\}$, $R_5 = \{5\}$, $R_4 = \{4\}$
$R_3 = \{3,6\}$, $R_2 = \{2, 4, 6\}$



Тоо бүхэн өөрөө өөрийнхөө хуваагч болох учир a/b харьцаа нь рефлексив байна. VII бүлгийн 4 §-ийн 3-р бодлогын бодолтыг үз.

2 §.

2 а) Энэ харьцаа нь эсрэг рефлексив ба эсрэг тэгш хэмт бөгөөд транзитив байна.

б) Энэ харьцаа нь рефлексив тэгш хэмтэй боловч транзитив биш ээ.

3 §.

2. Хэрэв $a = b + km$ ба $c = d + k_1m$ бол

$$a + c = b + d + (k + k_1)m,$$
$$a - c = b - d + (k - k_1)m \text{ ба}$$
$$ac = bd + (dk + bk_1)m + $$
$$+ kk_1m^2 = bd + (dk + bk_1 + kk_1m)m.$$

Ийм учраас

$$a \pm c \equiv b \pm d \pmod m, \; ac \equiv bd \pmod m$$

3. a, b тоонуудын хувьд $|a| = |b|$ харьцаа нь рефлексив, тэгш хэмтэй ба транзитив байна. Ийм учраас эиэ нь эквивалентийн харьцаа юм. Эквивалентийн анги бүр нь $(a, -a)$ хосуудаас тогтоно. Ийм хос бүрийн гишүүд нь $a = o$ байх тохиолдлоос бусад бүх тохиолдлуудад бие биеэсээ ялгаатай байна.

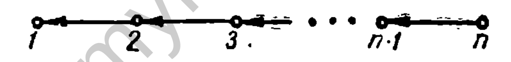
4 §.

1. Бүрэн эрэмбэлэлтийн граф дээр

(4, 3), (4, 2), (4, 1), (3, 2), (3,1), (2,1)

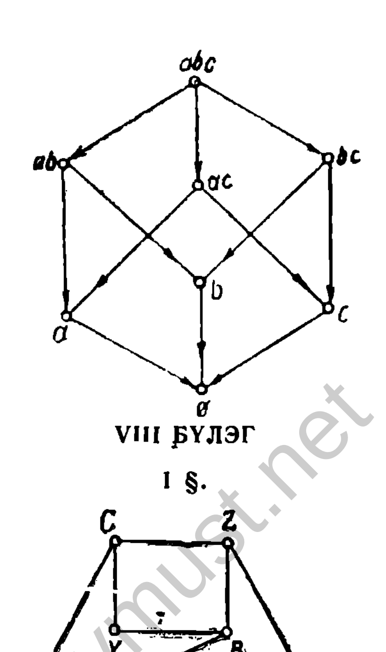
ирмэгүүд байх ба 4, 3, 2, 1 энгийн, чиглэлт гинж нь суурь граф нь болно.

2. Суурь граф нь дараахь чиглэлт энгийн гинж нь байна.



3. a/b харьцаа нь зэрэмдэг эрэмбэлэлтийн харьцаа мөн гэдгийг харуулахын тулд $a = 1\,a$ учраас a/a байна гэдгийг юуны өмнө тэмдэглэе. Эрс зэрэмдэг эрэмбэлэлтийн хувьд $a|b$ харьцаа нь $b = ka$, $k \neq 1$ гэсэн үг юм. Өөр үгээр хэлбэл хэрэв $a|b$ харьцаанд a нь b-гийн жинхэнэ хуваагч бол энэ харьцаа эсрэг рефлексив байна. Энэ харьцаа транзитив байна гэдгийг шалгая. Үнэндээ хэрэв $a|b$ ба $b|c$ бол $b = ka$ ба $c = k_1b$ учраас $c = k_1ka$ ба иймд $a|c$ байна. Эцэст нь хэрэв $a|b$ ба $b|a$ бол $b = ka$, $a = lb$ тул $b = klb$ болох ба энэ нь зөвхөн k, l бүхэл тоонууд хоёулаа нэгтэй тэнцүү буюу өөрөөр хэлбэл $a = b$ байх үед л биелнэ. Эрс зэрэмдэг эрэмбэлэлтийн хувьд $a|b$, $b|a$ харьцаанууд нэг зэрэг биелэхгүй.

4. $\varnothing$-г оролцуулбал 8 дэд олонлог байна. Суурь графыг зураг дээр дүрсэлжээ. Урвуу граф нь суурь графтай изоморф байна гэдгийг тэмдэглэе.



VIII БҮЛЭГ

1 §.

2. Энэ нь нэгдүгээрт 95-р зураг дээрх граф ба энэ графад шинэ ирмэгүүд нэмэхэд гардаг тийм графууд юм. Хоёрдугаарт 95-р зураг дээрх графад нэг тусгайрлагдсан орой нэмэхэд үүсэх граф ба энэхүү шинэ графад шинэ ирмэгүүд нэмэхэд гарч ирэх тийм бүх графууд юм.

2§.

1. $b = 7$, $p = 11$, $г = 6$ ба $7 - 11 + 6 = 2$

2. Ер нь $b = (n+1)^2$, $p = 2n(n+1)$

$$г = n^2 + 1,\ b - p + г = 2.$$

4§.

2. Бүгд дээр нь

ГАРЧИГ

Оршил I бүлэг. Граф гэж юу вэ?
1 §. Спортын тэмцээн 5
2 §. Тэг граф ба бүрэн граф 7
3 §. Изоморф графууд 9
4 §. Хавтгай графууд 13
5 §. Хавтгай графуудын тухай нэг бодлого 15
6 §. Графын ирмэгийн тоо 19

II бүлэг. Холбоост графууд
1 §. Компонентууд 23
2 §. Кенигсбергийн гүүрүүрийн тухай бодлого 25
3 §. Эйлерийн графууд 27
4 §. Зөв замыг эрэх 30
5 §. Гамильтоны шугам 32
6 §. Ухаан сорих бодлогууд ба графууд 34

III бүлэг. Мод
1 §. Мод ба ой 38
2 §. Цикл ба мод 40
3 §. Хотуудыг холбох тухай бодлого 42
4 §. Гудамж, талбайнууд 45

IV бүлэг. Харгалзаа тогтоох нь
1 §. Ажилд оруулах тухай бодлого 49
2 §. Өөр томьёоллууд 53
3 §. Тойрог харгалзаа 56

V бүлэг. Чиглэлт графууд
1 §. Дахиад л спортын тэмцээнүүд 60
2 §. Нэг чиглэлийн хөдөлгөөн 61
3 §. Оройн зэрэг 67
4 §. Уг гарлын графууд 69

VI бүлэг. Тоглоомууд ба ухаан сорих бодлогууд
1 §. Ухаан сорих бодлогууд ба чиглэлт графууд 76
2 §. Тоглоомын онол 79
3 §. Спортын тоймчийн гаж буруу санал 85

VII бүлэг. Харьцаа
1 §. Харьцаа ба граф 90
2. §. Тусгай нөхцөлүүд 93
3 §. Эквивалентийн харьцаа 96
4 §. Зэрэмдэг эрэмбэлэлт 101

VIII бүлэг. Хавтгай графууд
1 §. Графын хавтгай байх нөхцөлүүд 106
2 §. Эйлерийн томьёо 110
3 §. Графын зарим нэг харьцаа, хоёрдмол графууд . . 113
4 §. Зөв олон талстууд 116
5 §. Шигтгэмэл 121
IX бүлэг. Газрын зураг будах
1 §. Дөрвөн будгийн тухай асуудал 124
2 §. Таван будгийн тухай теорем 127
Дасгалуудын шийдүүд 133

Зохиогч **О. Оре**
Орчуулагч **Y. Санжмятав**
Редактор **А. Мекей**

ГРАФ БА ТYYНИЙГ ХЭРЭГЛЭХ

Хэвлэлийн редактор **Д. Пүрэвдорж**
Зураач **А. Лүндэн**
Уран сайхны редактор **Д. Батсуурь**
Техник редактор **З. Бурмаа**
Хянагч **Д. Пүрэвдорж, С. Бадамсэд, С. Бизъяа**

Зах. № 144 Хэв. газ. № 311/7
Өрөлтөнд 1978 оны 5-р сарын 5-нд
Хэвлэлтэнд 1979 оны 1-р сарын 15-нд
Цаасны хэмжээ 84×108/32, х. х. 4,5
х. н. х.6,16, т.х 4,88, хэвлэсэн тоо 5000
Үнэ 2 тө 95 мө

БНМАУ-ын Ардын боловсролын Яам
Барилгачдын талбай 15.

Д. Сүхбаатарын нэрэмжит хэвлэлийн комбинатад хэвлэв.

Д. Сүхбаатарын талбай 2.